

ESTIMADOR DE ERRO PARA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS HIERÁRQUICOS APLICADO AO PROBLEMA FLUIDO-ESTRUTURA NA FORMULAÇÃO NÃO SIMÉTRICA

Horacio Valadares Duarte[†], Renato Pavanello[‡]

[†]Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Antonio Carlos, 6627 - Campus Pampulha
CEP 31270-901 - Belo Horizonte, MG, Brasil
e-mail: hvduarte@ufmg.br

[‡]Departamento de Mecânica Computacional - FEM - UNICAMP
C.P. 6122 - CEP 13083-970 - Campinas, SP, Brasil
e-mail: pava@fem.unicamp.br.

Key Words: Finite Element Method, Fluid-Structure Interaction, Eigenvalue problems, Error Estimator, p -approximation.

Abstract. *This work presents a hierarchical finite element formulation applied to p adaptive refinement process in fluid-structure dynamic analysis. The error estimator was developed to fluid-structure problems in Potential Velocity formulation. This paper shows that this error estimator can be applied to a pressure formulation procedure. The numerical finite element solutions is obtained using structural beam elements and triangular hierarchical finite elements in an acoustic domain. A consistent interface model and refinement is presented. The numerical procedure is tested using analytical and numerical solutions for a classical 2-dimensional plate-cavity coupled system. The adaptive process and the error estimator gives improved global results with acceptable computational cost.*

1 INTRODUÇÃO

O método dos elementos finitos aplicado ao problema fluido-estrutura gera matrizes não simétricas se for empregada a formulação (u, P) em domínio finito. O uso da variável pressão na equação que descreve o comportamento do fluido e da variável deslocamento para a estrutura resulta em uma matriz de acoplamento que torna o problema assimétrico. Essa característica da formulação impede o uso da maioria dos programas de otimizados para o método dos elementos finitos que lidam com matrizes esparsas e simétricas em banda. Por outro lado, esta formulação é uma das mais econômicas em termos de espaço de memória requerido, usa apenas uma variável por nó no domínio fluido.^{1,2} Esta característica é bastante atraente em se tratando de estimadores de erro uma vez que o estimador estima o erro para cada grau de liberdade no elemento para todos elementos do domínio.

Como a formulação (u, P) usa duas variáveis para descrever o comportamento dos domínios acoplados foi usado o estimador de Friberg.^{3,4} Esse estimador foi formulado explorando as propriedades das matrizes geradas pelo método dos elementos finitos na formulação p ou hierárquica. A elevação de um grau do polinômio de interpolação definido por funções hierárquicas vai gerar uma matriz em que a matriz original é uma sub-matriz,⁵ essa característica permite estimar soluções para os autopares da matriz modificada a partir das soluções da matriz original. Portanto, o estimador de Friberg,³ usado neste trabalho, diferencia-se por estimar o erro sem usar as características específicas do problema e da discretização do domínio, variáveis empregadas pelos estimadores clássicos.⁶⁻⁸ Como o estimador de Friberg explora propriedades do sistema matricial, pode trabalhar com sistemas acoplados formulados a partir de variáveis de diferentes tipos.

O estimador de Friberg foi formulado para sistemas matriciais simétricos, a formulação (u, P) não o é. Neste trabalho será mostrado que o estimador para o problema em potencial de velocidade ou simétrica apresentada na referência⁹ pode ser empregado para o problema não simétrico (u, P) .

2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O problema de acústica interna analisado neste trabalho constitui-se de uma cavidade fechada por elemento estrutural flexível, especificamente uma viga. Para possibilitar o emprego de soluções analíticas da referência¹⁰ as condições de contorno para as outras paredes são de pressão nula.

2.1 Matrizes Globais para o Problema Fluido-Estrutura na Formulação em Pressão

A equação dinâmica da viga considerando-se a hipótese de Euler-Bernoulli é dada por:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - A \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q \quad (1)$$

tendo como condições de contorno

$$w = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_e^e \quad (2)$$

sendo Γ_e^e a região da fronteira onde o deslocamento w normal ao eixo da viga é nulo. Os termos E e I são respectivamente o módulo de elasticidade do material da viga e o momento de inércia em relação a linha neutra, q o carregamento, A é a área da seção transversal, ρ representa a densidade do material. A equação que descreve o problema acústico bidimensional ou acústica "plana" é a equação de Helmholtz:

$$\nabla^2 P - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

onde P representa as oscilações de pressão em torno da pressão de equilíbrio, c é a velocidade do som no meio. As condições de contorno são dadas por:

$$P = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_{p=0}^f \quad \text{e} \quad \frac{\partial P}{\partial n} = \rho_0 \frac{\partial \dot{u}_n}{\partial t} \quad \text{em} \quad \Gamma_{pe}^f \quad (4)$$

A primeira equação representa a condição de pressão nula $\Gamma_{p=0}^f$. A segunda condição é a equação de conservação de momento linear normal parede, que representa a condição de acoplamento entre parede elástica e fluido quando $\dot{u}_n = \dot{w}_n$ onde w é o deslocamento normal a viga. Multiplicando-se as expressões por funções de ponderação, simbolizadas por v e r e aplicando o postulado de Green, resultará na forma fraca do sistema acoplado:

$$\left\{ \begin{array}{l} EI \int_0^{L_{Tot}} \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx + \int_0^{L_{Tot}} \left(A \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} v \right) dx = \int_0^{L_{Tot}} q v dx \\ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega} r \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} d\Omega = \oint_{\Gamma} v \frac{\partial P}{\partial n} d\Gamma \end{array} \right. \quad (5)$$

Considerando as variáveis de tempo e espaço separáveis, após a discretização em elementos, e feita a aproximação com o emprego das funções de forma convencionais e hierárquicas, o sistema acima pode ser escrito na forma matricial como:

$$\left\{ \begin{array}{l} [K_e] \{w\} - \omega^2 [M_e] \{w\} = [L] \{P\} \\ [H_f] \{P\} - \frac{\omega^2}{c^2} [E_f] \{P\} = -\rho_f \omega^2 [L]^T \{u\} \end{array} \right. \quad (6)$$

Nas expressões acima $[K_e]$ e $[M_e]$ são as matrizes de rigidez e de massa para a viga, $[H_f]$ e $[E_f]$ são respectivamente as matrizes volumétrica e de compressibilidade para o fluido e $[L]$ a matriz de acoplamento. As funções de forma empregadas para viga foram publicadas na referência,¹¹ as funções usadas para os elementos fluidos foram definidas por Peano.⁵

Usando as matrizes acima como submatrizes chega-se a matrizes não simétricas, porém, na configuração típica do problema de autovalor autovetor.²

$$\left[\begin{array}{cc} [K_e] & -[L] \\ 0 & [H_f] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} w \\ P \end{array} \right\} - \omega^2 \left[\begin{array}{cc} [M_e] & 0 \\ \rho_f [L]^T & \frac{1}{c^2} [E_f] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} w \\ P \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (7)$$

2.2 Formulação do Problema Acoplado para Cavidade Acústica em Potencial de Velocidade

O problema da acústica linearizada bidimensional pode ser formulado em outras variáveis. Qualquer outra variável que mantenha algum tipo de relação linear com a variável pressão irá satisfazer a equação da onda Equação (3). A escolha deve recair em uma variável que permita simetrizar ou facilitar a simetria das matrizes do sistema acoplado. Algumas referências clássicas em acústica¹² usam a formulação do problema acústico em potencial de velocidade. A variável potencial de velocidade é definida da seguinte forma

$$-\rho_f \frac{d\Psi}{dt} = -\rho_f \dot{\Psi} = P \quad (8)$$

e satisfaz a Equação (3)

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \ddot{\Psi} = 0 \quad (9)$$

o campo de velocidades instantâneas é dado por:

$$\vec{V} = \nabla \Psi \quad (10)$$

portanto, a condição de contorno na interface:

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = \nabla \Psi \cdot \vec{n} = \dot{w} \cdot \vec{n} = \dot{w}_n \quad (11)$$

logo

$$\oint_{\Gamma} v \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds = \oint_{\Gamma} v \nabla \Psi \cdot \vec{n} ds = \oint_{\Gamma} v \dot{w}_n ds \quad (12)$$

Após alguma manipulação algébrica e matricial,¹ dada em detalhes na referência,¹³ chega-se a:

$$-\omega \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} K_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho_f} H_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_f c^2} E_f \end{bmatrix} \cdots \\ \begin{bmatrix} 0 & L & M_e & 0 \\ L^T & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_f c^2} E_f \\ M_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho_f c^2} E_f & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_w \\ \psi_\theta \\ \omega \psi_w \\ \omega \psi_\theta \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (13)$$

2.3 Estimador de Erro de Friberg Aplicado ao Problema Fluido-Estrutura em formulação de Pressão ou Não Simétrica

As expressões para o estimador de erro foram deduzidas a partir da formulação em potencial de velocidade Equação (13),⁹ e são dadas pela Equação (14) para o domínio

estrutural e Equação (15) para o fluido. O estimador é baseado em propriedades das funções hierárquicas no conceito usado por Peano⁵ e foi deduzido a partir de um sistema matricial simétrico.³

$$\eta_{i,j}^e = \frac{\left(K_{e(n+1,n)}\psi_w - \lambda_i^{(k)} L_{(n+1,q)}\psi_\theta - (\lambda_i^{(k)})^2 M_{e(n+1,n)}\psi_w \right)^2}{k_i \left(K_{e(n+1,n+1)} - (\lambda_i^{(k)})^2 M_{e(n+1,n+1)} \right)} \quad (14)$$

$$\eta_{i,j}^f = \frac{\left(-\frac{1}{\rho_f} H_{f(q+1,q)}\psi_\theta - \lambda_i^{(k)} [L_{(n,q+1)}]^T \psi_w + \frac{(\lambda_i^{(k)})^2}{\rho_f c^2} E_{f(q+1,q)}\psi_\theta \right)^2}{k_i \left(\frac{1}{\rho_f} \left[H_{f(q+1,q+1)} - \left(\frac{\lambda_i^{(k)}}{c} \right)^2 E_{f(q+1,q+1)} \right] \right)} \quad (15)$$

Nas expressões acima $\eta_{i,j}$ é o erro relativo associado à i -ésima frequência, estimado para o elemento j . Portanto, o erro estimado da i -ésima frequência corresponderá a soma dos erros estimados para esta frequência para todos os graus de liberdade de todos os elementos fluidos e estruturais. Os índices n e q simbolizam as dimensões das matrizes da estrutura e do fluido respectivamente e $n + q = k$. Os termos ψ_w e ψ_θ referem-se aos componentes dos autovetores que correspondem às matrizes da estrutura e do fluido, ver Equação (13).

Estas equações são expressas em função das submatrizes resultantes da discretização do domínio para as variáveis pressão e deslocamento. Como a discretização do domínio não é alterado com a mudança de variáveis e como estas são linearmente relacionadas, satisfazendo a mesma equação, dadas pelas Expressões (3) e (9), pode-se concluir que o estimador deduzido pelas Equações (14) e (15) é válido para o problema na formulação não simétrica.

3 RESULTADOS NUMÉRICOS E ANÁLISE

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos da aplicação do estimador de erro desenvolvido para o problema fluido-estrutura. O problema teste foi publicado por Y. S. Shin¹⁰ e foi escolhido por apresentar resultados analíticos para as frequências associadas aos modos estruturais.

Os resultados numéricos referem-se à configuração apresentada na Figura (1). O arranjo é basicamente uma placa fechando a cavidade. O fluido está confinado no interior da cavidade, a interface do fluido é exclusivamente com a placa, a condição de contorno nas outras três paredes é de pressão nula. Para o problema bidimensional que será analisado, a placa é modelada como uma viga, e neste problema a viga é bi-apoiada com rotação livre nos apoios.

O problema analisado empregou os seguintes valores: comprimento da cavidade $L_T = 3,048 m$, altura $H=6,096m$. Para a viga foi usado módulo de elasticidade $E = 2,068 \times 10^{11} N/m^2$, momento de inércia em relação a linha neutra $I = 0,1675 \times 10^{-4} m^4$, área da

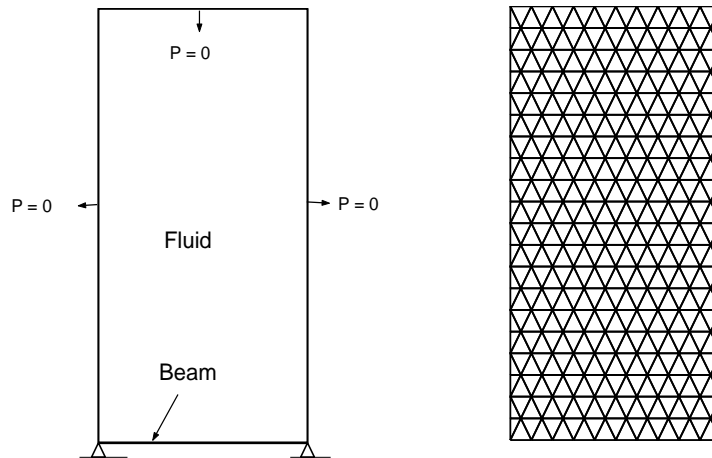


Figure 1: Desenho da cavidade acústica, a direita a Malha FE420 empregada na discretização do domínio fluido.

seção transversal $A = 0,005058 \text{ m}^2$, densidade $\rho_e = 7830,8 \text{ Kg/m}^3$. O fluido ocupando o espaço interno foi caracterizado pela densidade $\rho_0 = 999,21 \text{ Kg/m}^3$ e pela velocidade da perturbação no meio $c = 1524 \text{ m/s}$.

A malha, identificada como *FE420* e apresentada Figura (1), é a malha que define a discretização empregada no problema numérico. Nessa malha o domínio fluido tem 420 elementos triangulares acoplado com a viga discretizada por 10 elementos uniformes.

As frequências analíticas usadas como referência são dadas pela expressão:¹⁰

$$\omega_{n_e}^2 \left(\rho_e A + e_e \frac{\rho_0 \tanh(H\beta_n)}{\beta_n} \right) = EI \left(\frac{n_e \pi}{L} \right)^4 \quad (16)$$

sendo:

$$\beta^2 = \left| \frac{\omega_{n_e}^2}{c^2} - \left(\frac{n_e \pi}{L} \right)^2 \right| \quad (17)$$

nestas expressões L é o comprimento da interface fluido-estrutura, H a altura do domínio fluido, c a velocidade acústica do fluido, ρ_e e ρ_0 as densidades do material da estrutura e do fluido respectivamente. A é a área da seção transversal, E o módulo de elasticidade, e I o momento de inercia, todos referentes a viga e e_e é a profundidade da placa em contato com o fluido. Neste problema foi usada a profundidade $e_e = 1,0 \text{ m}$. A frequência ω_{n_e} é chamada predominante estrutural do problema acoplado, e $n_e = 1, 2, 3, 4, \dots \infty$. Na realidade ocorrerão os modos predominante fluido e modos fluido-estrutura, mas para eles não há uma expressão analítica.

Das Equações (16) e (17) e para os dados do problema, as seis primeiras frequências predominante estruturais são: $\omega_{e_1} = 9,9$, $\omega_{e_2} = 54,8$, $\omega_{e_3} = 147,4$, $\omega_{e_4} = 294,1$, $\omega_{e_5} = 496,7$, $\omega_{e_6} = 752,9$, valores expressos em Hertz. Será denominado erro real ou erro calculado

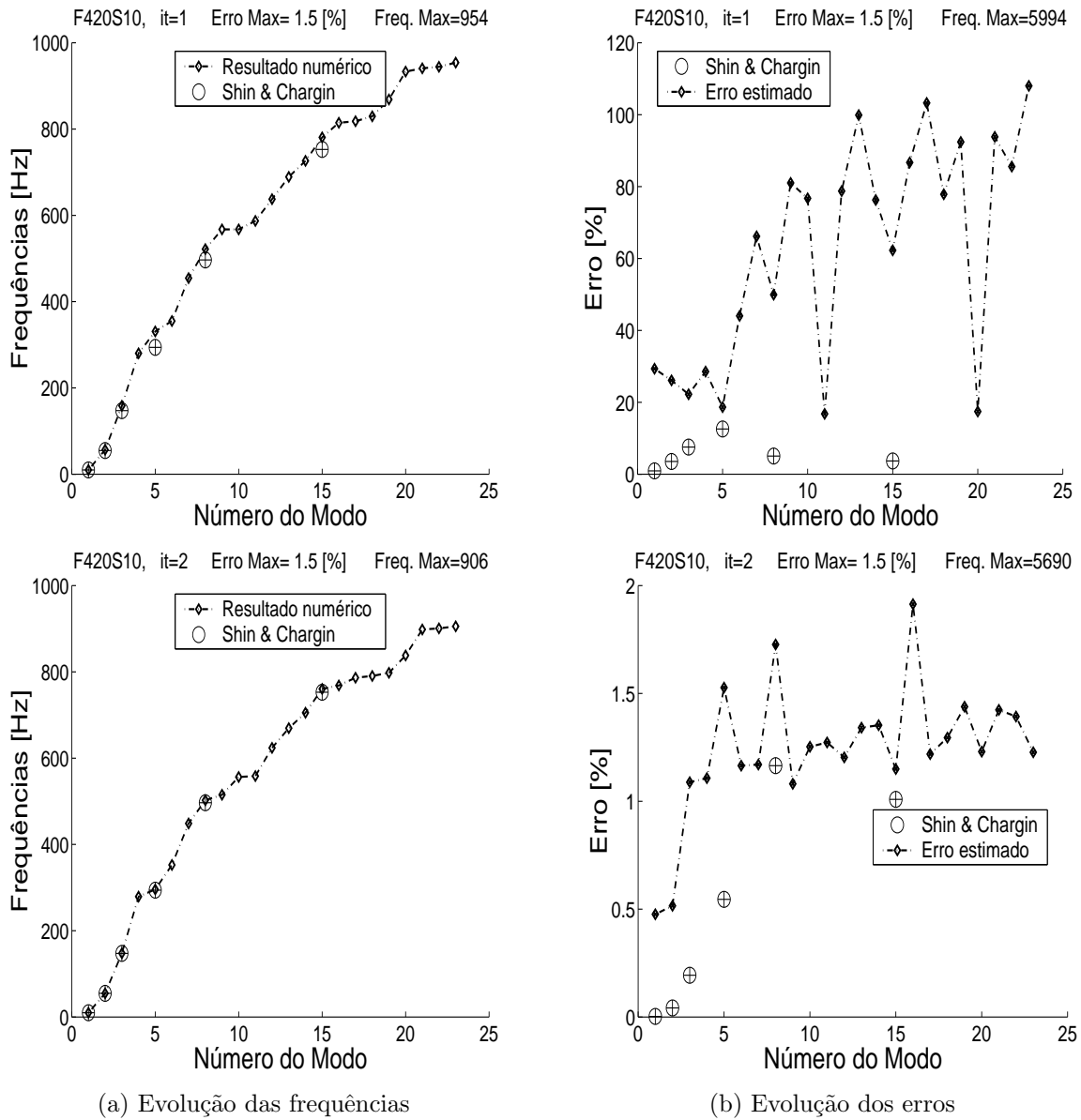


Figure 2: Evolução das Frequências calculadas e teóricas e dos erros associados à essas frequências para a 1^a. iteração, gráficos superiores, e 2^a. iteração, gráficos inferiores. Malha FE_{420} formulação não Simétrica.

o erro obtido da diferença entre o resultado numérico e o resultado analítico e o erro estimado será o erro obtido a partir das Equações (14) e (15).

Os gráficos apresentados nas Figuras (2) e (3) mostram a evolução das frequências e dos erros a elas associados no processo iterativo para a malha FE_{420} . Os gráficos apresentados na Figuras (4) e na Figura (5) mostram a evolução do erro estimado e

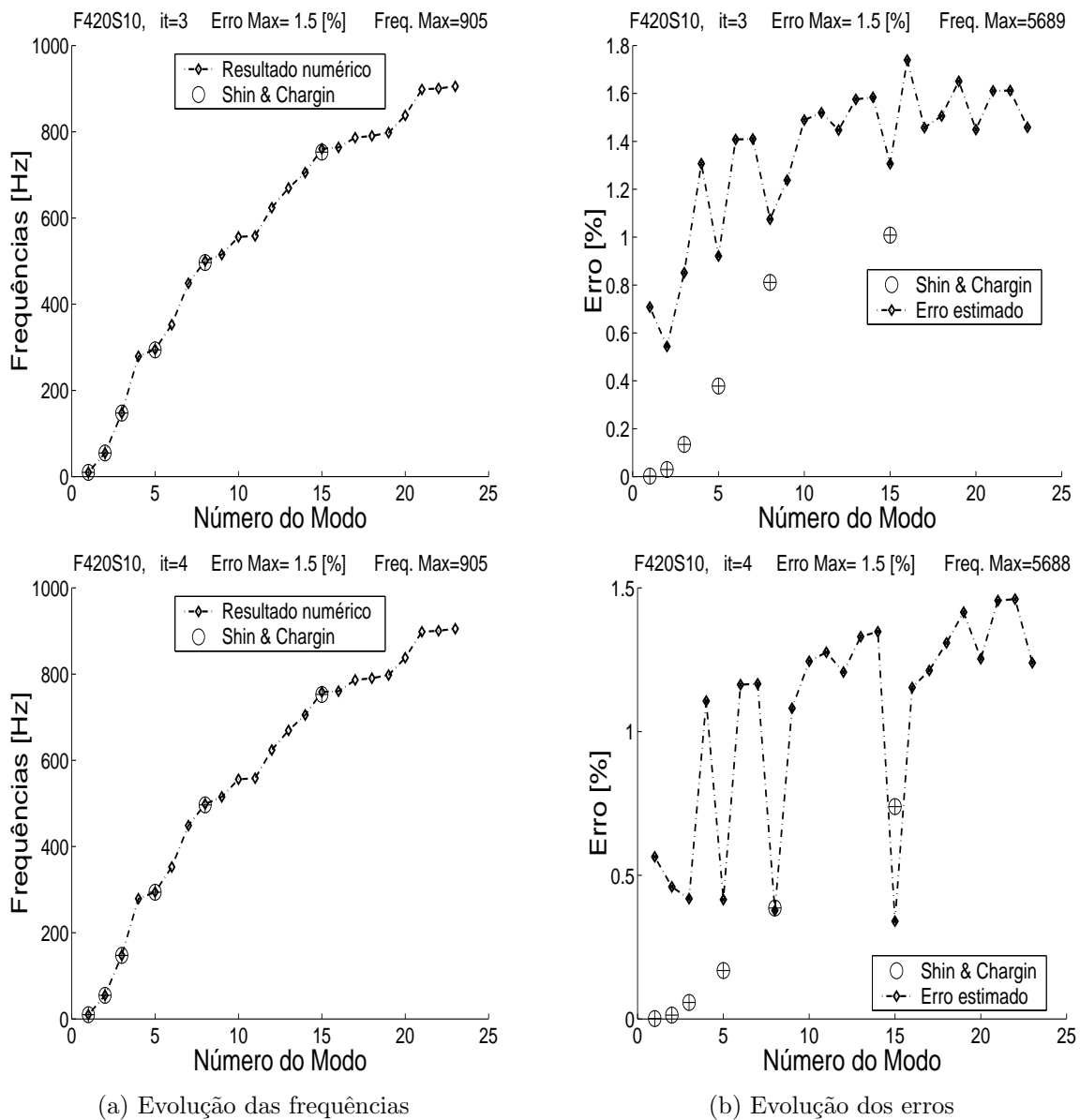


Figure 3: Evolução das Frequências calculadas e teóricas e dos erros associados à essas frequências para a 3^a iteração, gráficos superiores, e 4^a iteração, gráficos inferiores. Malha FE_{420} formulação não Simétrica.

real em função do grau de liberdade do sistema para os modos 3, 5, 8 e 15 que são modos estrutural dominantes e, portanto, com frequências analíticas correspondentes à: $\omega_{e_3} = 147,4$, $\omega_{e_4} = 294,1$, $\omega_{e_5} = 496,7$, $\omega_{e_6} = 752,9$. O processo adaptativo usou o estimador proposto nas Equações (14) e (15). O estimador proposto foi aplicado apenas à formulação não simétrica. Para os casos apresentados o limite superior de frequência

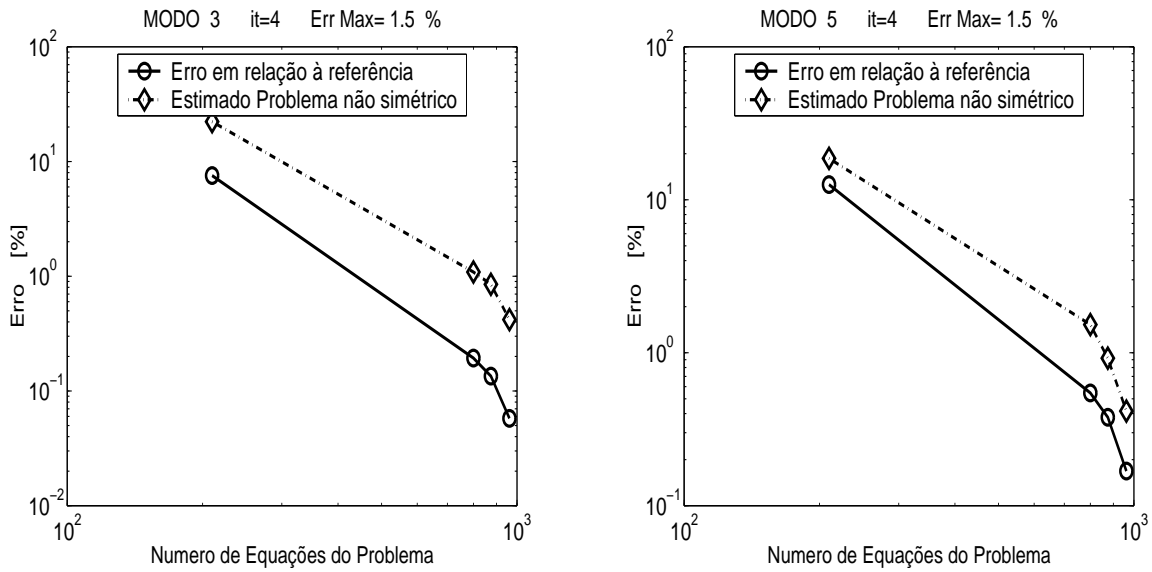


Figure 4: Evolução dos Erros calculados e estimados em relação ao grau de liberdade do sistema. Malha *FE420* formulação não Simétrica. Modos 3 e 5 predominantemente estruturais.

foi de 955 *Hertz* e o erro máximo prescrito de 1,5%.

As Figuras (2) e (3) permitem o acompanhamento do comportamento do erro calculado e estimado em iterações sucessivas. O erro estimado é a variável de trabalho do processo

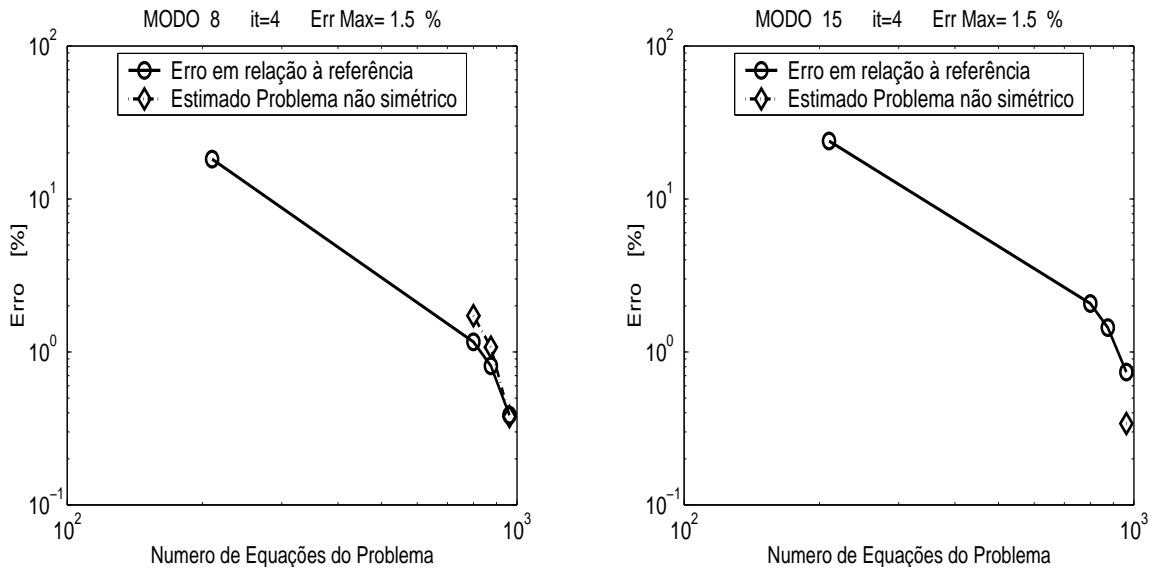


Figure 5: Evolução dos Erros calculados e estimados em relação ao grau de liberdade do sistema. Malha *F420* formulação não Simétrica. Modos 8 e 15 predominantemente estruturais.

p -adaptativo, portanto, essas figuras reportam o comportamento do procedimento e sua confiabilidade. A Figura (2) mostra que em apenas 1 iteração o erro real ficou muito próximo do valor de erro máximo admitido. O procedimento p adaptativo usou duas outras iterações para que o erro estimado ficasse abaixo de 1,5%. Estes resultados permitem afirmar que o estimador dado pelas Expressões (14) e (15) é aplicável ao problema fluido-estrutura na formulação em pressão ou não simétrica.

Nas Figuras (4) e (5) é mostrada a evolução dos erros estimados e calculados em relação à solução analítica para os modos 3, 5, 8 e 15. Novamente fica clara a eficiência do estimador em identificar e corrigir os erros. Estes gráficos foram traçados após o pós-processamento, identificação e ordenamento correto dos modos. As Equações (14) e (15) usam os autovetores para estimar o erro dos autovalores associados, mas o agrupamento dos autovalores em modos só é possível quando é feita uma interpretação física do resultado do modelo matemático em relação fenômeno real. Portanto, o agrupamento de autovalores em modos como foi feito nas Figuras(4) e (5), é fruto de uma interpretação física dos resultados numéricos e permitem avaliar e validar a precisão dos resultados e sua utilidade. Mas durante o processo iterativo puramente matemático não há como a rotina interpretar os resultados e classifica-los.

No processo de convergência da 8^a e 15^a frequências, Figura (5), ocorreram cruzamento de modos. Nesse caso, foram plotados apenas os erros calculados em relação ao modo identificado com o 8^o e 15^o modos ao final do processo adaptativo. Nesses situações o erro estimado não foi incluído por não referir-se ao modo físico, portanto, não apresentando significado sob esta ótica. O cruzamento de modos pode ocorrer quando a diferença entre as frequências for inferior ao erro associado à estas frequências ou autovalores.

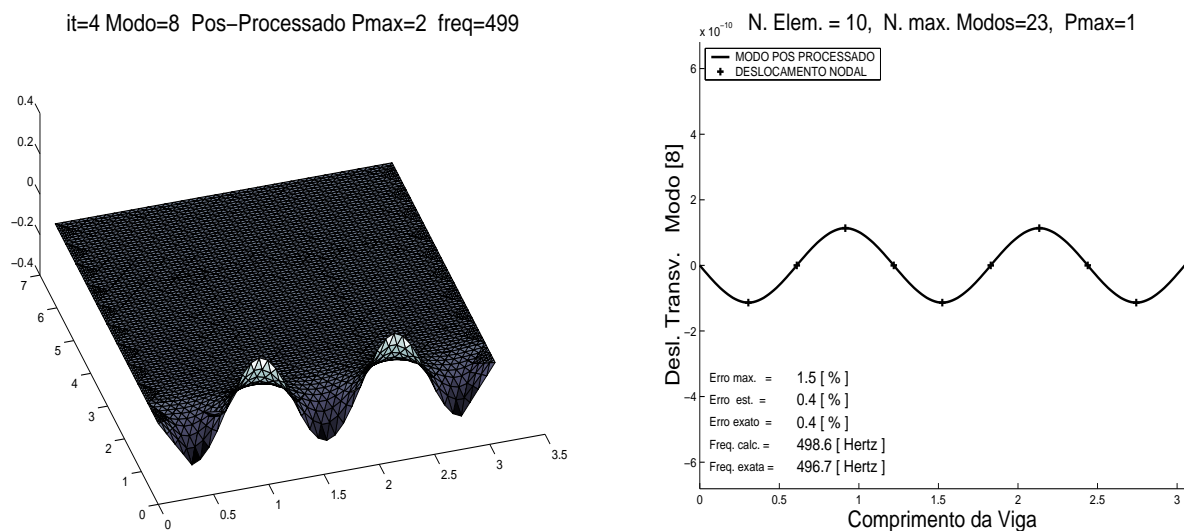


Figure 6: Malha $FE420$, 8^o modo pós-processado no domínio fluido. Formulação não Simétrica.

As Figuras (6) e (7) foram incluídas para ilustrar a capacidade da formulação p em descrever os modos após o pós-processamento dos autovetores ao final do processo iterativo. Nas Figuras (6) e (7) os modos associados ao domínio fluido estão pós-processados. Os modos estruturais plotados no gráfico à direita dessas figuras são também pós-processados usando as funções de interpolação físicas para vigas. Deve-se acrescentar que não houve acréscimo nos termos hierárquicos para os elementos estruturais, os termos hierárquicos concentraram-se no domínio fluido.

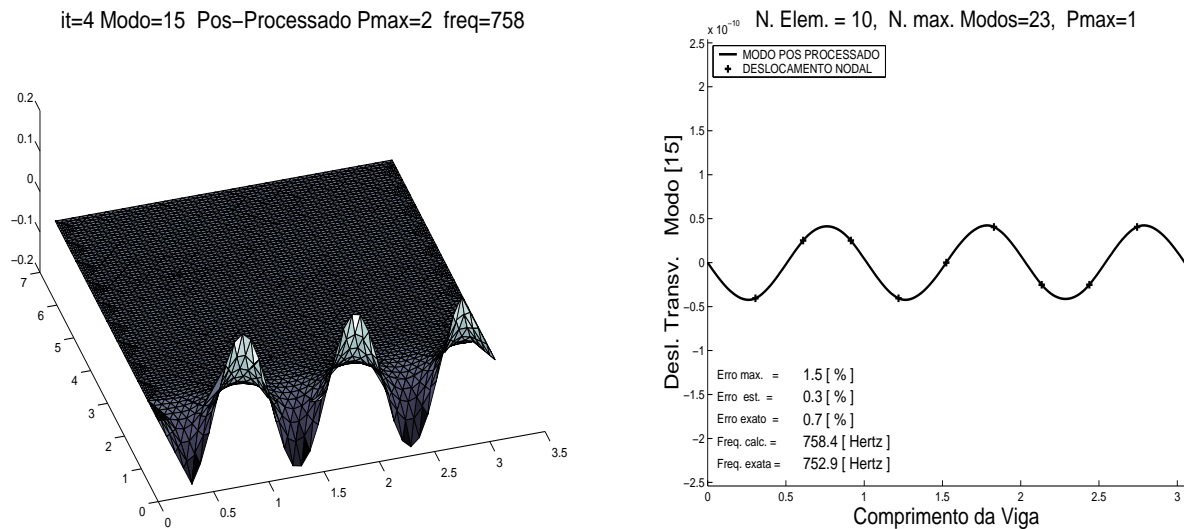


Figure 7: Malha FE_{420} , 15^o modo pós-processado no domínio fluido. Formulação não Simétrica.

4 CONCLUSÕES

Este trabalho mostrou que o estimador para problema fluido-estrutura deduzido para potencial de velocidade pode ser empregado na formulação em pressão. Além disso mostrou a eficiência do estimador em identificar e corrigir o erro no procedimento de cálculo. Como o estimador resulta da implementação de duas equações, Equação (14) e (15), pode ser programado de forma fácil e a um custo muito baixo.

5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Everstine G. C. A symmetric potential formulation for fluid-structure interaction. *Journal of Sound and Vibration*, **79**(1), 157–160 (1981).
- [2] Ohayon R. and Morand H. J.-P. *Fluid Structure Interaction*. John Wiley & Sons - Masson, Chichester, England, first edition, (1995).

- [3] Friberg O. An error indicator for the generalized eigenvalue problem using the hierarchical finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **23**, 91–98 (1986).
- [4] Friberg O., Möller P., Makovička D., and Wiberg N.-E. An adaptive procedure for eigenvalue problems using the hierarchical finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **24**, 319–335 (1987).
- [5] Peano A. Hierarchies of conforming finite elements for plane elasticity and plate bending. *Comp. & Maths with Appls.*, **2**, 211–224 (1976).
- [6] Sterwart J. R. and Hughes J. R. An a-posteriori error estimator and hp-adaptive strategy for finite element discretizations of the Helmholtz equation in exterior domains. *Finite Elements in Analysis and Design*, **25**, 1–26 (1997).
- [7] Ihlenburg F. *Finite Element Analysis of Acoustic Scattering*, volume 132 of *Applied mathematical sciences*. Springer-Verlag New York Inc., New York, first edition, (1998).
- [8] Wiberg N.-E. and Hager P. Error estimation and h-adaptivity for eigenfrequency analysis of plates in bending: Numerical results. *Computers & Structures*, **78**, 1–10 (2000).
- [9] Duarte H. V. Pavanello R. Estimador de erro para método dos elementos finitos hierárquicos aplicado ao problema fluido-estrutura na formulação simétrica. In *Anais Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, João Pessoa PB Brasil*. Sociedade Brasileira de Ciências Mecânicas, (2002).
- [10] Shin Y. S. and Chargin M. K. Acoustic responses of coupled fluid-structure system by acoustic-structural analogy. *Shock Vibration Bulletin*, **proc. 53**(part 2), 11–21 (1983).
- [11] Duarte H. V. Pavanello R. Modelagem p-adaptativa da dinâmica de pórticos planos. In *Anais Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, Natal RN Brasil*. Sociedade Brasileira de Ciências Mecânicas, (2000).
- [12] Kinsler L. E., Frey A. R., Coppens A. B., and Sanders J. V. *Fundamentals of Acoustics*. John Wiley & Sons, New York, (1982). 3^a edição.
- [13] Galli Luiz A. F. *Estudo do comportamento dinâmico de sistemas acoplados fluido-estrutura utilizando-se uma formulação simétrica em potencial de velocidades*. Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Mecânica Computacional, Dissertação de Mestrado, (março 1995).