

PROJETO ÓTIMO DE MANIPULADORES 3R CONSIDERANDO SEU VOLUME DE TRABALHO

Paulo R. Bergamaschi^{*}, Fernando R. Gonzalez^{**}, Antônio C. Nogueira^{**}
e Sezimária F. Pereira Saramago^{**}

^{*} Universidade Federal de Goiás – Campus de Catalão
Av. Dr. Lamartine Pinto de Avelar, nº 1120, CEP: 75701-220, Catalão (GO) – Brasil
e-mail: paulob@innet.psi.br

^{**} Universidade Federal de Uberlândia – Campus Santa Mônica
Av. João Naves de Ávila, 2160, CEP: 38408-100, Uberlândia (MG) – Brasil
e-mail: Saramago@ufu.br

Palavras Chave: robótica, projeto de manipulador, espaço de trabalho, otimização, envoltória.

Resumo: *O objetivo deste trabalho é o projeto ótimo de robôs manipuladores com três juntas rotacionais (3R), considerando as características do seu espaço de trabalho. Movimentar objetos no espaço é uma tarefa comum à maioria dos robôs manipuladores, assim, o estudo do seu espaço de trabalho é de grande interesse de um ponto de vista teórico e prático, sendo uma característica fundamental para o estudo cinemático e o seu projeto dimensional. A capacidade de um robô desenvolver uma determinada tarefa depende da sua arquitetura e da dimensão de seus membros, assim como da posição que ele assume no ambiente de trabalho. Estas características devem ser observadas na fase de projeto dos manipuladores robóticos. Muitas vezes, o espaço de trabalho pode conter buracos (holes) e vazios (voids), que são regiões não atingíveis pelo efetuador do manipulador. O conhecimento correto da fronteira do espaço de trabalho, permite exatidão no cálculo do volume deste espaço de trabalho, sendo de grande importância por causa do impacto sobre o projeto do manipulador, o posicionamento do manipulador no ambiente de trabalho e a destreza do mesmo. Neste trabalho é formulado um problema de otimização que visa obter as dimensões ótimas do robô considerando o volume do seu espaço de trabalho. Assim, propõe-se uma função objetivo que maximiza este volume e restrições para obter as dimensões do manipulador dentro de valores práticos. Para a solução do problema de otimização são aplicadas técnicas sequenciais. Exemplos numéricos são apresentados para validar a metodologia proposta.*

1 INTRODUÇÃO

No projeto dimensional de robôs manipuladores uma característica fundamental a ser considerada é o volume do seu espaço de trabalho. O espaço de trabalho de um manipulador é definido como sendo o conjunto de todos os pontos possíveis de serem atingidos pelo ponto de referência H situado no efetuador¹. Assim, o cálculo exato do espaço de trabalho e de sua fronteira é muito importante, pois influi no projeto dimensional, no posicionamento do manipulador no ambiente de trabalho e na sua destreza para executar tarefas.

Este trabalho propõe uma formulação algébrica para o cálculo do volume do espaço de trabalho de manipuladores com três juntas de revolução (3R), a partir do conhecimento de sua fronteira. Cabe salientar que, a presença de vazios no espaço de trabalho e as descontinuidades (“quebras”) que aparecem na fronteira deste espaço, acrescentam grandes dificuldades na formulação algébrica do modelo matemático, mas foram considerados no modelo estudado.

Diversos estudos têm investigado as propriedades do espaço de trabalho de cadeias robóticas abertas visando determinar as características geométricas e cinemáticas, bem como deduzir algoritmos de análise e síntese para projetos. Roth² desenvolveu um dos primeiros artigos relacionados com o estudo do espaço de trabalho dos manipuladores. Aplicando diversas metodologias, vários pesquisadores desenvolveram algoritmos para avaliar o espaço de trabalho dos manipuladores e determinar a sua fronteira. Algumas metodologias faziam uso de técnicas de esquadrihar o espaço Cartesiano³, outras de cálculos recursivos para os ângulos das juntas⁴ e de métodos baseados nas máximas distâncias atingíveis¹. Ceccarelli^{5,6} apresentou uma formulação algébrica para determinar o espaço de trabalho de manipuladores de revolução. Abdel-Malek e Yeh⁷ apresenta uma formulação analítica para obter a fronteira do espaço de trabalho para mecanismos de três graus de liberdade (3-gdl) em geral.

Mais recentemente, Abdel-Malek et al⁸ introduziram uma formulação genérica para a determinação de vazios no espaço de trabalho de um manipulador serial. Wenger⁹ mostrou como levar em conta, na fase de projeto, a possibilidade de um manipulador executar movimentos através da variação de posturas não-singulares. Para uma revisão bibliográfica mais detalhada sobre o assunto são recomendados Lanni et al¹⁰ e Saramago et al¹¹.

Neste artigo o problema de otimização é definido tal que a função objetivo é o volume do espaço de trabalho, sujeita a restrições que controlam o espaço de trabalho, obrigando-o a ocupar uma determinada porção da região de trabalho. Foram incluídas restrições laterais para obter as dimensões do manipulador dentro de valores práticos.

O problema de otimização é investigado usando técnicas seqüenciais de minimização¹². Fez-se uso do código computacional DOT (design optimization tools), desenvolvido por Vanderplaats¹³. A metodologia é testada por meio de exemplos numéricos, confirmando a eficiência do uso da formulação algébrica para o espaço de trabalho.

2 ENVOLTÓRIAS DO ESPAÇO DE TRABALHO

Um dos métodos mais usados para descrever geometricamente um robô é aquele que utiliza a notação de Denavit e Hartenberg, cujo esquema é exibido na Fig. 1 (a). Esta notação

basicamente consiste em construir a matriz de transformação homogênea, T_{i-1}^i , que representa o sistema $X_i Y_i Z_i$, associado ao i -ésimo membro do robô, em relação ao sistema $X_{i-1} Y_{i-1} Z_{i-1}$, associado ao $(i-1)$ -ésimo membro, para cada i variando de 1 a n , onde n é o grau de liberdade do robô.

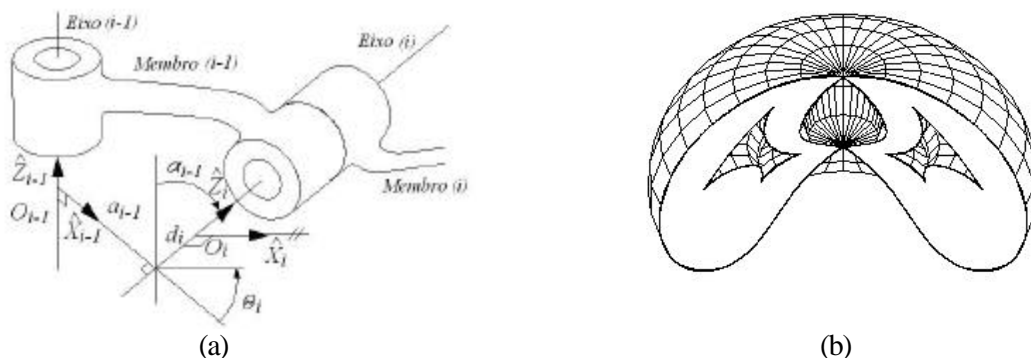


Figura 1: (a) Notação de Denavit e Hartenberg para manipuladores; (b) Espaço de trabalho de um robô 3R.

Pela Fig. 1 (a) pode-se observar que a representação do sistema $X_i Y_i Z_i$ em relação ao sistema $X_{i-1} Y_{i-1} Z_{i-1}$ percorre quatro etapas bem definidas, representadas pelos quatro parâmetros cinemáticos \mathbf{a}_{i-1} , a_{i-1} , d_i e \mathbf{q}_i , que também são conhecidos por parâmetros de Denavit-Hartenberg. Consequentemente, a construção da matriz de transformação homogênea T_{i-1}^i depende da maneira como essas etapas são percorridas. Neste trabalho, esta matriz é construída efetuando a seguinte ordem de execução das etapas:

- 1- uma rotação horária de \mathbf{a}_{i-1} em torno do eixo X_{i-1} ;
- 2- uma translação de a_{i-1} unidades sobre o eixo X_{i-1} ;
- 3- uma translação de d_i unidades ao longo do eixo Z_i ;
- 4- uma rotação anti-horária de \mathbf{q}_i em torno do eixo Z_i .

Portanto, a matriz de transformação homogênea genérica de uma referência em relação à precedente é dada por

$$T_{i-1}^i = \text{Rot}(\mathbf{a}_{i-1}, X_{i-1}) \text{Trans}(a_{i-1}, 0, 0) \text{Trans}(0, 0, d_i) \text{Rot}(\mathbf{q}_i, Z_i)$$

$$= \begin{bmatrix} C\mathbf{q}_i & -S\mathbf{q}_i & 0 & a_{i-1} \\ S\mathbf{q}_i C\mathbf{a}_{i-1} & C\mathbf{q}_i C\mathbf{a}_{i-1} & S\mathbf{a}_{i-1} & d_i S\mathbf{a}_{i-1} \\ -S\mathbf{q}_i S\mathbf{a}_{i-1} & -C\mathbf{q}_i S\mathbf{a}_{i-1} & C\mathbf{a}_{i-1} & d_i C\mathbf{a}_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

onde $a_0 = \mathbf{a}_0 = 0$, $d_1 = 0$, $S\mathbf{q}_i = \text{sen } \mathbf{q}_i$, $C\mathbf{q}_i = \text{cos } \mathbf{q}_i$, $S\mathbf{a}_i = \text{sen } \mathbf{a}_i$, $C\mathbf{a}_i = \text{cos } \mathbf{a}_i$, para $i=1,2,3$.

O espaço de trabalho de um ponto H situado na extremidade de um robô manipulador é o conjunto de todos os pontos que H ocupa quando as variáveis de junta são variadas em todo os seus intervalos de definição⁴. O ponto H é usualmente escolhido como sendo o centro do

efetuador, ou a ponta de um dedo ou ainda o fim do próprio manipulador. Por se tratar do sistema de referência 3, este ponto será denotado por H_3 e representado por

$$H_3 = [a_3 \ 0 \ 0 \ 1]^t, \quad a_3 \neq 0. \quad (2)$$

O procedimento mais imediato para investigar o espaço de trabalho é variar os ângulos q_1 , q_2 e q_3 sobre seus intervalos de definição e estimar as coordenadas do ponto H_3 com respeito à base do manipulador, ou seja

$$H_0 = [H_0^x \ H_0^y \ H_0^z \ 1] = T_0^1 T_1^2 T_2^3 H_3 \quad (3)$$

Expandindo a Eq. (3), pode-se obter

$$H_2 = \begin{bmatrix} H_2^x \\ H_2^y \\ H_2^z \\ 1 \end{bmatrix} = T_2^3 H_3 = \begin{bmatrix} a_3 Cq_3 + a_2 \\ a_3 Sq_3 Ca_2 + d_3 Sa_2 \\ -a_3 Sq_3 Sa_2 + d_3 Ca_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} H_1^x \\ H_1^y \\ H_1^z \\ 1 \end{bmatrix} = T_1^2 H_2 = \begin{bmatrix} H_2^x Cq_2 - H_2^y Sq_2 + a_1 \\ H_2^x Sq_2 Ca_1 + H_2^y Cq_2 Ca_1 + H_2^z Sa_1 + d_2 Sa_1 \\ -H_2^x Sq_2 Sa_1 - H_2^y Cq_2 Sa_1 + H_2^z Ca_1 + d_2 Ca_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

e, por fim

$$H_0 = T_0^1 H_1 = \begin{bmatrix} H_1^x Cq_1 - H_1^y Sq_1 \\ H_1^x Sq_1 + H_1^y Cq_1 \\ H_1^z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

que é a representação vetorial do espaço de trabalho, onde H_j^x , H_j^y e H_j^z representam a 1ª, 2ª e 3ª componente do vetor H_j , respectivamente, para $j = 1, 2$.

O espaço de trabalho de robôs com estrutura 3R pode ser obtido por intermédio da extensão radial r e da extensão axial z com respeito à base^{6,14}. Para esta representação, r é a distância de um ponto genérico do espaço de trabalho ao eixo Z_1 e z é a distância desse mesmo ponto ao plano X_1Y_1 . Assim, usando a Eq. (6), as equações paramétricas (de parâmetros q_2 e q_3) do lugar geométrico descrito pelo ponto H sobre um plano radial são

$$\begin{cases} r^2 = (H_0^x)^2 + (H_0^y)^2 = (H_1^x Cq_1 - H_1^y Sq_1)^2 + (H_1^x Sq_1 + H_1^y Cq_1)^2 = (H_1^x)^2 + (H_1^y)^2 \\ z = H_1^z \end{cases} \quad (7)$$

Usando a equação (5), obtém-se

$$r^2 + z^2 = (H_2^x)^2 + (H_2^y)^2 + a_1^2 + (H_2^z + d_2)^2 + 2a_1(H_2^x Cq_2 - H_2^y Sq_2) \quad (8)$$

e, pela metodologia matemática, admitindo que $a_1 \neq 0$ e $\text{sen} \mathbf{a}_1 \neq 0$, multiplicando a segunda equação das Eqs. (7) por $2a_1 / \text{sen} \mathbf{a}_1$ e usando a Eq. (5), resulta

$$\frac{2a_1}{\text{sen} \mathbf{a}_1} z - \frac{2a_1(H_2^z + d_2)\cos \mathbf{a}_1}{\text{sen} \mathbf{a}_1} = -2a_1(H_2^x \text{sen} q_2 + H_2^y \cos q_2) \quad (9)$$

Finalmente, elevando ao quadrado, membro a membro, as Eqs. (8) e (9) e somando as equações resultantes, obtém-se a seguinte equação

$$[r^2 + z^2 - A]^2 + [Cz + D]^2 + B = 0. \quad (10)$$

Os coeficientes A , B , C e D na Eq. (10) são chamados *coeficientes estruturais do manipulador* e dependem dos parâmetros de Denavit e Hartenberg $a_1, a_2, a_3, d_2, d_3, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ e \mathbf{q}_3 na seguinte forma

$$\begin{cases} A = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + d_2^2 + d_3^2 + 2a_2 a_3 \cos \mathbf{q}_3 + 2d_2 d_3 \cos \mathbf{a}_2 - 2d_2 a_3 \text{sen} \mathbf{q}_3 \text{sen} \mathbf{a}_2; \\ B = -4a_1^2 [(a_3 \cos \mathbf{q}_3 + a_2)^2 + (a_3 \text{sen} \mathbf{q}_3 \cos \mathbf{a}_2 + d_3 \text{sen} \mathbf{a}_2)^2]; \\ C = \frac{2a_1}{\text{sen} \mathbf{a}_1}; \\ D = -\frac{2a_1(-a_3 \text{sen} \mathbf{q}_3 \text{sen} \mathbf{a}_2 + d_3 \cos \mathbf{a}_2 + d_2)\cos \mathbf{a}_1}{\text{sen} \mathbf{a}_1}. \end{cases} \quad (11)$$

A Eq. (10) representa a equação do lugar geométrico descrito pelo ponto H no semi-plano radial de referência 0. Ela é a equação do espaço de trabalho do manipulador 3R e pode ser pensada como sendo a equação de uma família de curvas planas $f(r, z, \mathbf{q}_3) = 0$, no plano rz , de parâmetro \mathbf{q}_3 . Assim, a expressão analítica da fronteira do espaço de trabalho pode ser obtida como a envoltória desta família de curvas¹⁵, ou seja, o conjunto dos pontos (r, z) que satisfazem o sistema de equações

$$\begin{cases} f(r, z, \mathbf{q}_3) = [r^2 + z^2 - A]^2 + [Cz + D]^2 + B = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}_3}(r, z, \mathbf{q}_3) = -[r^2 + z^2 - A]E + [Cz + D]G + F = 0 \end{cases} \quad (12)$$

onde

$$\begin{cases} E = \frac{\partial A}{\partial \mathbf{q}_3} = -2 a_2 a_3 \operatorname{sen} \mathbf{q}_3 - 2 d_2 a_3 \cos \mathbf{q}_3 \operatorname{sen} \mathbf{a}_2 ; \\ F = \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial \mathbf{q}_3} = 4 a_1^2 a_3 [a_2 \operatorname{sen} \mathbf{q}_3 + a_3 \cos \mathbf{q}_3 \operatorname{sen} \mathbf{q}_3 \operatorname{sen}^2 \mathbf{a}_2 - d_3 \cos \mathbf{q}_3 \operatorname{sen} \mathbf{a}_2 \cos \mathbf{a}_2]; \\ G = \frac{\partial D}{\partial \mathbf{q}_3} = \frac{2 a_1 a_3 \cos \mathbf{q}_3 \operatorname{sen} \mathbf{a}_2 \cos \mathbf{a}_1}{\operatorname{sen} \mathbf{a}_1}. \end{cases} \quad (13)$$

O teorema a seguir estabelece condições para que este sistema defina implicitamente r e z como função de \mathbf{q}_3 e, além disso, para que a envoltória seja regular.

No teorema, para simplicidade de notação, a variável t será usada ao invés da variável \mathbf{q}_3 .

Teorema 1: Sejam $f: U \rightarrow R$ e $\partial f / \partial t: U \rightarrow R$ funções de classe C^1 no aberto U de $R^2 \times R$ e $(x_o, y_o, t_o) \in U$ tal que

$$f(x_o, y_o, t_o) = \frac{\partial f}{\partial t}(x_o, y_o, t_o) = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \neq 0 \text{ em } (x_o, y_o, t_o), \quad (15)$$

então, dada uma família de funções, representada por $f(x, y, t) = 0$,

- (a) a envoltória dessa família pode ser parametrizada, em uma vizinhança de (x_o, y_o) , por t ;
- (b) a envoltória, dada por $t \mapsto (x(t), y(t))$, é regular em t_o se, e somente se, $\partial^2 f / \partial t^2 \neq 0$ em (x_o, y_o, t_o) .

As coordenadas radial r e axial z dos pontos da fronteira do espaço de trabalho são dadas como a solução do sistema (12), supondo que $\operatorname{sen} \mathbf{a}_1 \neq 0$, $C \neq 0$ e $E \neq 0$. Após algumas manipulações⁶, conclui-se que as equações paramétricas da envoltória são

$$\begin{cases} z = \frac{-F G \pm \sqrt{-E^2 [B(E^2 + G^2) + F^2]}}{C(E^2 + G^2)} - \frac{D}{C} \\ r = \sqrt{\frac{(C z + D)G + F}{E} + A - z^2} \end{cases} \quad (16)$$

cujo parâmetro é \mathbf{q}_3 . O ângulo \mathbf{q}_3 é o ângulo da junta no sistema de referência 3 e ele é a variável cinemática para a determinação do espaço de trabalho.

Geralmente, a referida envoltória é composta por duas curvas fechadas, uma interna e a outra externa, chamadas de fronteira interna e fronteira externa, respectivamente.

3 CÁLCULO DO VOLUME DO ESPAÇO DE TRABALHO

O espaço de trabalho de manipuladores 3R é um sólido de revolução, tendo Z_1 como o seu eixo de revolução. Um dos teoremas de Pappus-Guldin estabelece que o *volume de um corpo de revolução é igual à área geratriz multiplicada pela distância percorrida pela abscissa do baricentro da superfície, durante a geração do corpo*. Com base neste resultado, uma vez determinados a área e o baricentro da seção radial plana, dada no plano (r, z) , que funciona como uma seção geratriz, pode-se obter o volume do espaço de trabalho. A fronteira desta seção é a envoltória da família de curvas gerada pela Eq. (10). Assim, o cálculo do volume depende, principalmente, da separação e ordenação dos pontos das curvas que compõem essa envoltória.

Além disso, o espaço de trabalho pode conter buracos (holes) e vazios (voids), que são regiões não atingíveis pelo efetuador do manipulador, conforme representado na Fig. 2.

Definição 1: Define-se buraco (hole) no espaço de trabalho como uma região inacessível ao efetuador do manipulador, dentro do qual existe uma linha reta que é rodeada pelo espaço de trabalho sem ao menos tocá-lo¹⁶.

Definição 2: Define-se vazio (void) como uma região fechada e limitada, contida dentro do espaço de trabalho, mas não atingível pelo efetuador do manipulador. Existem dois tipos de vazios: vazio tipo anel (ring void) e vazio tipo maçã (apple void)¹⁶.

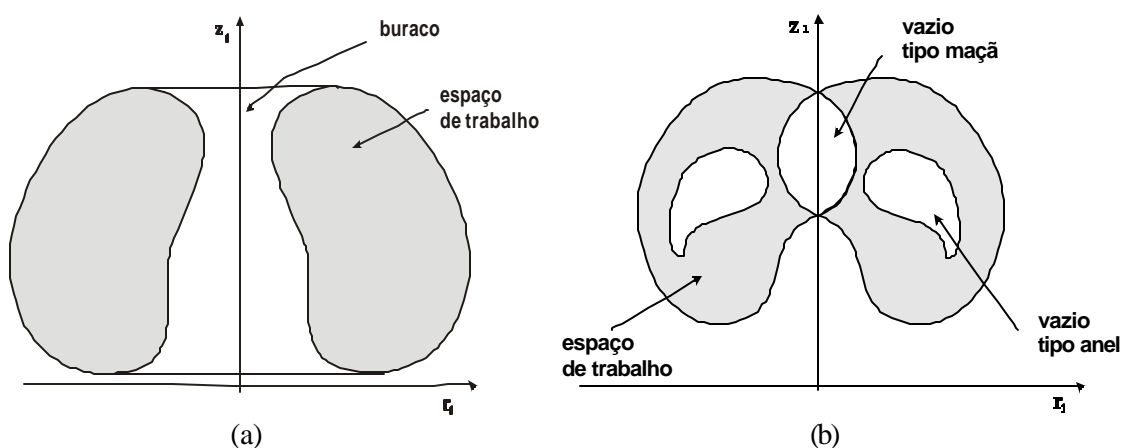


Figura 2: Seções radiais do espaço de trabalho: (a) com buraco; (b) com vazios tipo anel e tipo maçã.

A seguir é apresentada a metodologia para a separação e ordenação dos pontos da envoltória, e o cálculo da área da seção radial plana e do volume do espaço de trabalho.

3.1 Separação e ordenação dos pontos da envoltória

A área e o baricentro da seção radial plana são obtidos a partir da separação e ordenação dos pontos da envoltória.

Conhecendo-se os parâmetros dimensionais do robô, como o tamanho dos membros e os ângulos entre eles, é possível traçar a envoltória usando as Eqs. (16), variando o parâmetro q_3 em um intervalo de comprimento $2p$. Admitindo $a_2 \neq 0$, tem-se que

$$q_3^* + k\pi, k \hat{I} Z \Rightarrow E = 0, \quad (17)$$

onde

$$q_3^* = -\arctan(d_2 \text{sen } a_2 / a_2). \quad (18)$$

Observe nas Eqs. (16) que o coeficiente E deve ser diferente de zero, então o ângulo q_3 não pode assumir valores como $q_3^* + k\pi, k \hat{I} Z$.

Geralmente, a geração dos pontos (r, z) das curvas que definem a envoltória não é “bem comportada”, apresentando descontinuidades. O início da geração dos pontos pode ocorrer tanto na curva interna quanto na externa e, além disso, freqüentemente a geração sofre “quebras”, ou seja, ela muda de uma curva para a outra antes de concluir inteiramente uma delas ou, ainda, sofre “quebras” dentro da própria curva. A Fig. (3) ilustra duas destas situações à medida que os pontos da envoltória vão evoluindo. A evolução obedece, segundo as cores, a seguinte ordem: azul-vermelho-verde-preto.

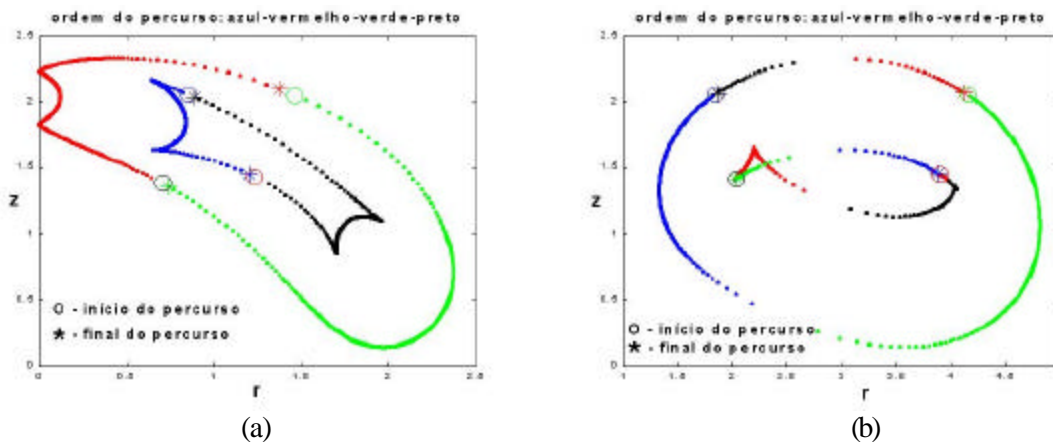


Figura 3: Comportamento da evolução dos pontos de envoltória do espaço de trabalho.

A Fig. 3 (a) exhibe a situação em que os pontos iniciam a sua evolução na curva interna até ocorrer uma “quebra”, onde saltam para a curva externa, permanecendo aí até terminá-la e, finalmente, após nova “quebra” voltam para a curva interna, enquanto que na Fig. 3 (b), a evolução se inicia na curva externa e sofre 6 “quebras”.

Definição 3: Diz-se que uma curva (interna ou externa) é *ordenada* quando os pontos que a formam evoluem sobre ela, sem apresentar “quebras na evolução”, em um só sentido.

Observe que na Fig. 3 (a), as duas curvas interna e externa já foram geradas ordenadas, ao passo que na Fig. 3 (b) não.

A alternância na geração dos pontos da envoltória da curva externa para a interna ou vice-versa e a geração não ordenada destas curvas são decorrentes do que é exposto abaixo.

Pela metodologia matemática, os valores r e z dados na Eq. (16) não podem ser complexos, pois caso sejam, o par (r, z) não constitui um ponto da envoltória. Assim, o radical que surge na expressão de z não pode ser negativo. Quem determina o sinal desse radical é a expressão

$$Q = B(E^2 + G^2) + F^2 \quad (19)$$

A mudança do sinal de Q , de negativo para positivo (ou seja, a mudança de z real para complexo), interfere na geração dos pontos, levando a uma quebra com mudança de curva. Já a mudança do sinal de Q , de positivo para negativo, significa o reinício da geração dos pontos da envoltória imediatamente após a ocorrência daquela quebra. Além disso, adotando o domínio de definição de \mathbf{q}_3 como sendo $(\mathbf{q}_3^*, \mathbf{q}_3^* + 2\mathbf{p})$, ao se aproximar do valor $\mathbf{q}_3^* + \mathbf{p}$, este por ser uma indeterminação de r influenciará na geração dos pontos da envoltória, causando também quebras na seqüência da geração dos pontos.

É natural que as quebras na geração dos pontos da envoltória influencie na ordenação das curvas externa e interna. Caso ocorra interferência na ordenação das curvas, a mesma deve ser corrigida invertendo o sentido da ordenação.

A área da seção plana depende ainda da presença ou não de vazios no espaço de trabalho. Se o espaço de trabalho não apresenta vazio tipo anel, a área da seção radial plana compreende todo o interior da curva externa; quando ocorre vazio, a área é aquela compreendida entre a curva externa e o vazio.

A presença ou não de vazio tipo anel é identificada com a análise das curvas que geram a envoltória. Se elas preenchem toda a região interna à curva interna, então não existe vazio; caso contrário, ele existe.

3.2 Cálculo da área da seção plana e do volume do espaço de trabalho

Com a separação e a ordenação das curvas que formam a envoltória e com a identificação da presença ou não de vazio tipo anel, a área da seção plana do espaço de trabalho, denotada por $Area$, é obtida como

$$Area = A_{ext} - A_{vazio} ; \quad A_{ext} = \sum_{j=1}^{N-1} At_j ; \quad A_{vazio} = \sum_{k=1}^{M-1} At_k , \quad (20)$$

$$At_i = \frac{[r(i+1) + r(i)] [z(i+1) - z(i)]}{2} \quad (21)$$

onde N é o número total de pontos da curva externa da envoltória, M é o número total de pontos na fronteira do vazio tipo anel, A_{ext} é a área dentro da curva externa, A_{vazio} é a área dentro do vazio tipo anel (se o vazio não existe, $A_{vazio} = 0$) e At_i é a área do trapézio representado na Fig. 4 (b).

Considerando a área da seção radial, a coordenada r_g do baricentro pode ser dada por

$$r_g = \frac{\sum_{j=1}^{N-1} (r_g t_j A t_j) - \sum_{k=1}^{M-1} (r_g t_k A t_k)}{Area}, \quad (22)$$

onde

$$r_g t_i = \frac{r(i)^2 + r(i+1)^2 + r(i)r(i+1)}{3[r(i) + r(i+1)]} \quad (23)$$

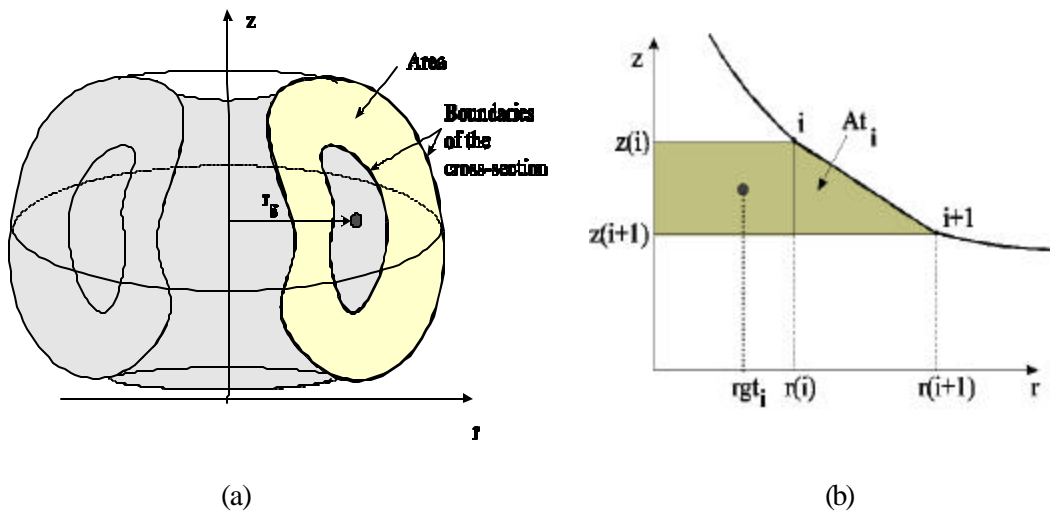


Figura 4: Um esquema para avaliação do espaço de trabalho de manipuladores 3R:
 (a) cálculo do volume; (b) cálculo da área através dos pontos da fronteira.

Observe que os trapézios utilizados no cálculo da área da seção radial plana podem, segundo a expressão (21), ter área negativa. Isto acontece sempre que $z(i+1)$ é menor do que $z(i)$. Se a orientação de uma das (ou das duas) curvas for no sentido horário, a área interna a esta(s) curva(s) será(ão) negativa(s), pois, neste caso, a contribuição dos trapézios que apresentam área negativa é maior do que aqueles que apresentam área positiva. Caso isto ocorra, basta tomar o valor absoluto da área em questão.

O volume do espaço de trabalho V pode ser avaliado pelo Teorema de Pappus-Guldin, de acordo com o esquema mostrado na Fig. 4 (a), através da equação

$$V = 2 \pi r_g Area. \quad (24)$$

4 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

O trabalho proposto consiste na síntese dimensional de um manipulador 3R. Assim, o problema de otimização é formulado visando a maximização do volume do espaço de trabalho, V . O problema de otimização é, então, definido como

$$\max \mathbf{f} = V \quad (25)$$

sujeito a

$$\min r \geq \min r_0; \quad \max r \leq \max r_0; \quad \min z \geq \min z_0; \quad \max z \leq \max z_0; \quad (26)$$

$$A_{vazio} \leq K A_{ext} \quad (K < 1) \quad (27)$$

e

$$C \text{ area}0 \leq \text{Area} \quad (C < 1) \quad (28)$$

onde

$$\text{area}0 = (\max r - \min r) (\max z - \min z) \quad (29)$$

e

$$X^l \leq X \leq X^u \quad (30)$$

O vetor das variáveis de projeto é dado por $X = [a_1, a_2, a_3, d_2, d_3, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$, X^l e X^u representam os limites inferiores e superiores, respectivamente. O problema de otimização está sujeito a limites do espaço de trabalho, pré-estabelecidos, representados pelas restrições (26), conforme mostrado na Fig. 5. A restrição dada pela Eq.(27) controla o tamanho do vazio em relação à área da curva externa. O objetivo é fazer com que o vazio seja o menor possível. A restrição dada pela Eq. (28) controla a área total em relação a área do retângulo dado pelos limites do espaço de trabalho. Aqui, o objetivo é fazer com que a área e, consequentemente, o volume ocupe o maior espaço possível. O volume V é avaliado usando a Eq. (24)

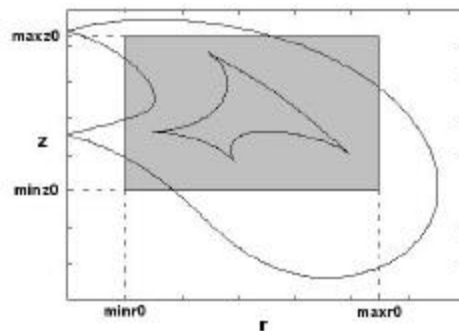


Figura 5: Representação das restrições (26): limites do espaço de trabalho.

5 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

A fim de verificar a validade do procedimento de otimização aqui proposto, são exibidos dois exemplos numéricos. As dimensões do manipulador são controladas pelas restrições laterais. O problema de otimização foi escrito como:

$$\min f = -V \tag{31}$$

sujeito a

$$\left\{ \begin{array}{l} g(1) = -\min z \leq 0 \\ g(2) = -\min r \leq 0 \\ g(3) = \max r - 6 \leq 0 \\ g(4) = \max z - 6 \leq 0 \\ g(5) = A_{vazio} - 0.4A_{ext} \leq 0 \\ g(6) = 0.6Area - 36 \leq 0 \end{array} \right. \tag{32}$$

$$0.1 < a_i < 3.0, \text{ para } i = 1, 2, 3.$$

$$0.1 < d_j < 3.0, \text{ para } j = 2, 3. \tag{33}$$

$$0.1 < \mathbf{a}_k < 1.5708, \text{ para } k = 1, 2.$$

Particularmente, nas restrições g foram usados os seguintes valores: $\min r_0 = 0.0$, $\max r_0 = 6.0$, $\min z_0 = 0.0$, $\max z_0 = 6.0$, $K=0.4$ e $C=0.6$.

No primeiro exemplo, os parâmetros de projeto iniciais são:

$$a_1=1.0, a_2=1.0, a_3=1.0, d_2=1.0, d_3=2.0, \mathbf{a}_1=90^\circ \text{ e } \mathbf{a}_2=45^\circ,$$

que correspondem a um volume inicial de 122.89 uv.. As restrições impostas são:

$$g(1) = -1.71, g(2) = -1.82, g(3) = 2.57, g(4) = -3.43, g(5) = -2.30 \text{ e } g(6) = 1.58.$$

Observe que as restrições $g(3)$ e $g(6)$ não são satisfeitas. A Fig. 6 (a) exibe a envoltória do espaço de trabalho inicial para este exemplo.

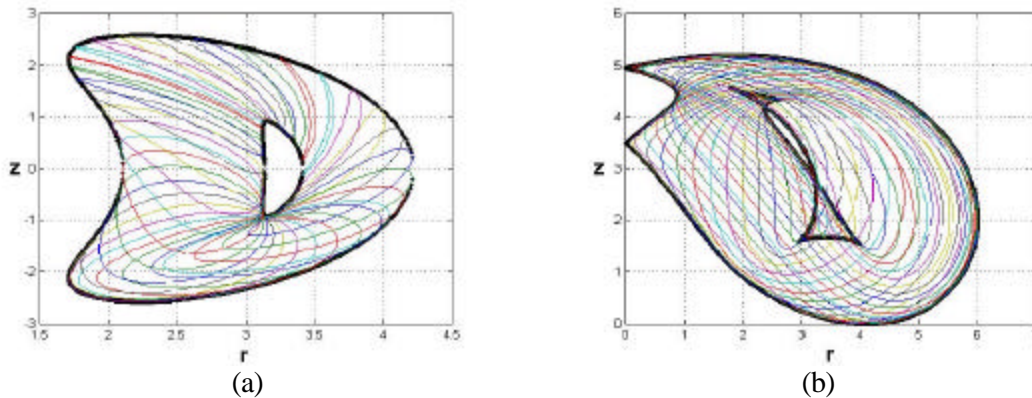


Figura 6: (a) Suposição inicial para o primeiro exemplo; (b) projeto ótimo.

A Fig. 6 (b) ilustra o resultado obtido através do procedimento de otimização. Os parâmetros ótimos de projeto são:

$$a_1 = 1.27, \quad a_2 = 1.45, \quad a_3 = 2.97, \quad d_2 = 1.6, \quad d_3 = 1.68, \quad \alpha_1 = 13.34^\circ \text{ e } \alpha_2 = 41.48^\circ$$

e o volume final é 437.366 uv., que apresenta um aumento em torno de 356%. Vale a pena ressaltar que todas as restrições de otimização foram obedecidas:

$$g(1) = -0.34e-02, \quad g(2) = 0.0, \quad g(3) = -0.19e-03, \quad g(4) = -0.81, \quad g(5) = -8.66 \text{ e } g(6) = -0.042.$$

A Fig 7 (a) exibe a envoltória inicial para o segundo exemplo, cujos parâmetros de projeto são:

$$a_1 = 0.3, \quad a_2 = 1.0, \quad a_3 = 0.5, \quad d_2 = 1.0, \quad d_3 = 1.0, \quad \alpha_1 = 60^\circ \text{ e } \alpha_2 = 30^\circ.$$

Neste caso, o volume inicial é 22.383 uv. e as restrições impostas têm os seguintes valores:

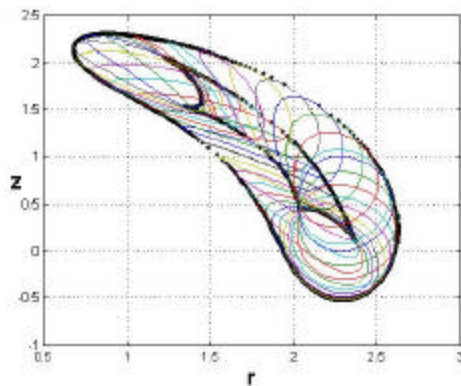
$$g(1) = -0.68, \quad g(2) = -3.38, \quad g(3) = 0.52, \quad g(4) = -3.70, \quad g(5) = -0.63 \text{ e } g(6) = 20.03.$$

Note que as restrições $g(3)$ e $g(6)$ não são satisfeitas. Os parâmetros ótimos de projeto para o segundo exemplo são:

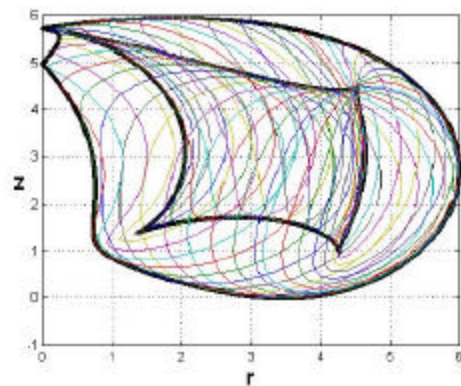
$$a_1 = 1.72, \quad a_2 = 1.02, \quad a_3 = 2.26, \quad d_2 = 2.99, \quad d_3 = 2.36, \quad \alpha_1 = 18.27^\circ \text{ e } \alpha_2 = 85.69^\circ$$

e o volume final é 521.727 uv., que corresponde a um aumento de aproximadamente 2231%. A envoltória ótima está ilustrada na Fig. 7 (b). Todas as restrições foram obedecidas, pois:

$$g(1) = -0.16e-02, \quad g(2) = -0.16e-02, \quad g(3) = -0.19e-05, \\ g(4) = -0.58e-01, \quad g(5) = -10.90 \text{ e } g(6) = -5.64.$$



(a)



(b)

Figura 7. (a) Suposição inicial para o segundo exemplo; (b) Projeto ótimo

6 CONCLUSÕES

O projeto ótimo de um manipulador 3R foi formulado como um problema de otimização cujo objetivo é maximizar o volume do espaço de trabalho. Restrições foram impostas ao problema para delimitar os limites desejados da região a ser alcançada, minimizar os vazios e obter as dimensões do robô de acordo com valores práticos.

Desenvolveu-se uma formulação algébrica para o cálculo do volume do espaço de trabalho. Técnicas sequenciais de otimização foram aplicadas e alguns exemplos apresentados demonstram a eficácia da metodologia.

7 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Fundação de Amparo à Pesquisa de Minas Gerais (Fapemig) pelo apoio financeiro ao presente trabalho, através do projeto TEC 084/02.

8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] A. Kumar and K.J. Waldron, "The Workspaces of a Mechanical Manipulator", *ASME Jnl of Mechanical Design*, **103**, July 1981, 665-672 (1981).
- [2] B. Roth, "Performance Evaluation of Manipulators from a Kinematic Viewpoint", Special Publication "Performance Evaluation of Programmable Robots and Manipulators", 39-61 (1975).
- [3] Y.C. Tsai and A.H. Soni, "An Algorithm for the Workspace of a General n-R Robot", *Journal of Mechanism, Transmission, Automation in Design*, **105**, 52-57 (1983).
- [4] K.C. Gupta and B. Roth, "Design Considerations for Manipulator Workspace", *ASME Jnl of Mechanical Design*, **104**, 704-711 (1982).
- [5] M. Ceccarelli, "On the Workspace of 3R Robot Arms", *The Fifth IFToMM International Symposium on Linkages and Computer Aided Design Methods – Theory and Practice of Mechanism*, Bucarest, **2**, 37-46 (1989).
- [6] M. Ceccarelli, "A Formulation for the Workspace Boundary of General N-Revolute Manipulators", *IFTToMM Jnl Mechanism and Machine Theory*, **31**, n.5, 637-646 (1996).
- [7] K. Abdel-Malek and H-J. Yeh, "Analytical Boundary of the Workspace for General 3-DOF Mechanisms", *The International Journal of Robotics Research*, **16**, n. 2, 198-213 (1997).
- [8] K. Abdel-Malek, H-J. Yeh and S. Othman, "Understanding Voids in the Workspace of Serial Robot Manipulators", *Proc. 23rd ASME Design Engineering Technical Conf.*, Baltimore, Maryland (2000).
- [9] P. Wenger, "Some Guidelines for the Kinematic Design of New Manipulators", *Mechanism and Machine Theory*, **35**, 437-449 (2000).
- [10] C. Lanni, S.F.P. Saramago and M. Ceccarelli, "Optimum Design of General 3R Manipulators by Using Traditional and Random Search Optimization Techniques". In: *XVI Congresso Brasileiro De Engenharia Mecânica (COBEM)*, 2001, Uberlândia. *Anais do XVI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica. Associação Brasileira de Ciências Mecânicas - ABCM*, **15**, 107-116 (2001).

- [11] S.F.P. Saramago, E. Ottaviano and M. Ceccarelli, “A Characterization of the Workspace Boundary of Three-Revolute Manipulators”, In: Design Engineering Technical Conferences (DETC'02), 2002, Montreal. Proceedings of DETC'02. ASME, **1**, 34342-34352 (2002).
- [12] M.S. Bazarra, H.D. Sherali and C.M. Shetty, *Nonlinear Programming. Theory and Algorithms*, second edition, John Wiley & Sons, New York, (1993).
- [13] G. Vanderplaats, *DOT - Design Optimization Tools Program – Users Manual*, Vanderplaats Research & Development, Inc, Colorado Springs, (1995).
- [14] M. Ceccarelli and C. Lanni, “Sintesis Optima de Brazos Manipuladores Considerando las Caracteristicas de su Espacio de Trabajo”, *Revista Iberoamericana de Ingenieria Mecanica*, **3**, n.1, 49-59 (1999).
- [15] J.W. Bruce and P.J. Giblin, *Curves and Singularities: a geometrical introduction to singularity theory*, Cambridge University Press, Great Britain, 2nd. Edition, (1992).
- [16] D.C.H. Yang and T.W. Lee, “On the Evaluation of Manipulator Workspace”, *Journal of Mechanism, Transmission, Automation in Design*, **105**, 70-77 (1983).