

DINÁMICA DE ANILLOS Y ARCOS CIRCUNFERENCIALES GRUESOS

C.P.Filipich^{1,4}, P. M. Bellés^{1,2} y M.B.Rosales^{1,3}

¹ Universidad Nacional de Sur, Depto. de Ingeniería. Bahía Blanca, Argentina.

² CIC, Póvincia de Buenos Aires, Argentina.

e-mail pbelles@criba.edu.ar

³ CONICET, Argentina.

⁴ Grupo de Análisis de Sistemas Mecánicos, FRBB, Universidad Tecnológica Nacional.

Palabras clave: arco, anillo, circunferencial, grueso, frecuencias.

Resumen. *El presente trabajo consiste en hallar las ecuaciones de movimiento para una barra gruesa homogénea de directriz circunferencial y sección transversal constante con al menos un plano de simetría que contiene al arco. Se tienen en cuenta dentro de la Resistencia de Materiales los aportes flexionales, axil y por corte en la energía de deformación; los correspondientes a inercias traslacional y rotatoria en la energía cinética. Se considera además el desplazamiento del eje neutro hacia el centro de curvatura de acuerdo a la teoría de barras de gran curvatura. Puede decirse que es una extensión natural de la teoría conocida como vigas Timoshenko con nuevas complejidades que son inherentes al especial tipo estructural.*

Las ecuaciones de movimiento se hallan a través del principio de Hamilton, poniéndose de manifiesto cada uno de los aportes que se tienen en cuenta. Por otro lado para ser coherentes con el principio aludido se utiliza para la tensión de corte, una expresión obtenida energéticamente para barras curvas.

Los valores exactos de las frecuencias naturales, surgen de solucionar un sistema diferencial en los tres corrimientos básicos que se abordan por medio de series algebraicas.

Se presentan ejemplos numéricos de vibraciones libres de arcos y anillos que se comparan con los obtenidos por el método de elementos finitos.

1 INTRODUCCIÓN

El presente trabajo consiste en hallar las ecuaciones de movimiento para una barra gruesa homogénea de directriz circunferencial y sección transversal constante con al menos un plano de simetría que contiene al arco. Se tienen en cuenta dentro de la Resistencia de Materiales los aportes flexionales, axil y por corte en la energía de deformación; los correspondientes a inercias traslacional y rotatoria en la energía cinética. Se considera además el desplazamiento del eje neutro hacia el centro de curvatura de acuerdo a la teoría de barras de gran curvatura. Puede decirse que es una extensión natural de la teoría conocida como vigas Timoshenko con nuevas complejidades que son inherentes al especial tipo estructural.

El planteo está basado en la referencia¹ donde se corrigen, amplían y generalizan los reportados por la bibliografía específica^{2,3,4,5}. En los otros trabajos referenciados^{3,4,5,6} se aborda el problema de vibraciones libres por medio del MEF sin resolverlo analíticamente y no totalmente general.

Las ecuaciones de movimiento se hallan a través del principio de Hamilton, poniéndose de manifiesto cada uno de los aportes que se tienen en cuenta. Por otro lado para ser coherentes con el teorema aludido se utiliza para la expresión de la tensión de corte, una obtenida energéticamente para barras curvas⁷.

Se presentan ejemplos numéricos de vibraciones libres que se comparan con los obtenidos con el elementos finitos rectos y curvos^{4,5}, y con elementos 2D y 3D.

Ahora bien, es interesante rescatar que los valores exactos de las frecuencias naturales, surgen de solucionar un sistema diferencial en los 3 corrimientos básicos que se abordan por medio de seres algebraicas^{8,9}, esta herramienta mostró ser muy poderosa para problemas diferenciales altamente no lineales; es de destacar que también lo es para los lineales. En este caso y para cualquier condición de vínculo la ecuación característica siempre consiste en anular un determinante de 3X3.

2 ENCUADRE PREVIO

En la figura 1 se muestra el esquema a utilizar: barra curva de sección uniforme cuya sección transversal tiene al menos un eje de simetría contenido en el plano de la estructura

Denominamos como “ α ” y “ t ” a las variables espacial y temporal respectivamente, indicándose como “ u ” al desplazamiento radial de la sección, como “ θ ” al giro flexional de la sección y como “ w^* ” al desplazamiento tangencial de cada fibra.

Admitimos la hipótesis de Navier-Bernoulli por la cual

$$u = u(\alpha, t) \quad (a)$$

$$\theta = \theta(\alpha, t) \quad (b) \quad (1)$$

$$w^* = w^*(\alpha, t, y) \quad (c)$$

donde

$$w^* = w(\alpha, t, y) + \theta(\alpha, t)y \quad (2)$$

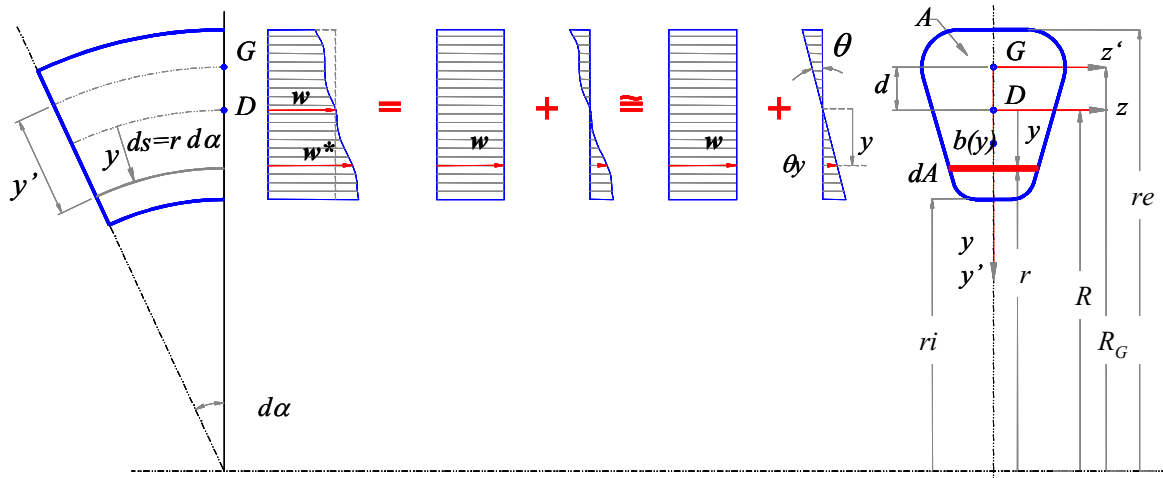


Figura 1: Barra curva

siendo “w” el desplazamiento tangencial del eje neutro. La coordenada “y” se mide desde el eje neutro creciendo hacia el centro de curvatura; “y’” se mide desde el baricentro de la sección. En la figura se indican los signos positivos .

Cabe aclarar que “θ” es la diferencia entre el giro total y el debido al corte. La hipótesis aceptada conduce, como sabemos, a que la distorsión angular “γ” es nula, con lo cual por la ley de Hooke la tensión tangencial “τ” debe ser correspondientemente nula. Por ello esta tensión se halla por simples consideraciones de equilibrio y sin verificar la compatibilidad de deformación (como generalmente se asume en Resistencia de Materiales).

De la teoría e barras de gran curvatura^{10,11}, si denominamos como “r” al radio de curvatura de la fibra genérica, se sabe que

$$\iint_A \frac{dA}{r} = \frac{A}{R} \quad (a); \quad \iint_A \frac{y}{r} dA = 0 \quad (b); \quad \iint_A \frac{y^2}{r} dA = A d \quad (c) \quad (3)$$

Siendo “A” el área uniforme de la sección transversal, “R” el radio de curvatura de la fibra neutra (que se ubica con (3-b)); a su vez:

$$d \equiv R_G - R \quad (4)$$

donde “R_G” es el radio de la fibra centroidal.

Introducimos la siguiente nomenclatura:

$$\begin{aligned}
 \gamma &\equiv \frac{R_G}{R} \geq 1 \quad (a); \quad J \equiv A R d \quad (b); \quad J_G \equiv \iint_A y^2 dA \quad (c) \\
 I_G &\equiv \iint_A y^3 dA \quad (d); \quad \beta^2 \equiv R_G d + i_G^2 \quad (e) \\
 r^2 &\equiv (3\gamma - 2)i_G^2 + \gamma d^2 - \frac{I_G}{AR} \quad (f) \\
 k^2 &\equiv \frac{r^2}{\gamma R^2} \quad (g); \quad q \equiv \frac{\beta^2}{\gamma R^2} \quad (h)
 \end{aligned} \tag{5}$$

“ J_G ” es el momento de inercia baricéntrico de la sección, así como “ i_G ” es el radio de giro de la misma. “ J ” se suele denominar momento de inercia neutro (pero no coincide con $\iint y^2 dA$). Digamos que $\gamma=1$ y $J=J_G$ cuando $R_G \rightarrow \infty$. Vemos también que si el eje “ z ” es de simetría entonces $I_G=0$.

Una pieza que esté sometida a flexión compuesta y corte bajo los esfuerzos $M(\alpha)$, $N(\alpha)$ y $Q(\alpha)$, está en equilibrio con las siguientes componentes de tensión:

$$\sigma = \sigma(\alpha, t, y) = \frac{R}{r} \left(\frac{M}{J} y + \frac{N}{A} \right) \quad (a) \tag{6}$$

$$\tau = \tau(\alpha, t, y) = \left(\frac{R}{r} \right)^2 \frac{QS}{bJ} \quad (b)$$

En las expresiones (6-a)^{10,11} y (6-b)⁷ indicamos con “ $b=b(y)$ ” el ancho de la sección variable con “ y ”; por “ $S=S(y)$ ” como es común definir vale:

$$S(y) \equiv \int_{R-r_i}^{R-y} b(y) y dy \tag{7}$$

por “ $r(i)$ ” (ver figura 1) denominamos al radio interno de curvatura de la fibra más cercana al centro de la circunferencia

Finalizando este encuadre previo de la problemática de barras curvas proponemos las siguientes relaciones constitutivas:

$$jM = \theta_\alpha \quad (a)$$

$$\varepsilon N = w_\alpha - u \quad (b) \tag{8}$$

$$\varphi Q = R\theta + w + u_\alpha \quad (c)$$

$$\text{con: } j \equiv \frac{R}{EJ}; \quad \varepsilon \equiv \frac{R}{EA}; \quad \varphi \equiv \frac{mR}{GA}.$$

Notación empleada para las derivadas: $(\cdot)_\alpha \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial\alpha}$; $(\cdot)_{\alpha\alpha} \equiv \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial\alpha^2}$; etc.

M, N y Q son los esfuerzos característicos en cada sección, es decir:

$$M = \iint_{(A)} \sigma y \, dA \quad (a); \quad N = \iint_{(A)} \sigma \, dA \quad (b); \quad Q = \iint_{(A)} \tau \, dA \quad (c) \quad (9)$$

siendo E el módulo de elasticidad y $G=E/2(1+\nu)$ donde ν es el coeficiente de Poisson. A su vez “m” es el factor de corte que definimos como:

$$m \equiv \frac{AR}{J^2} \int_{(R-r_i)}^{(R-r_e)} \frac{S^2(y) \, dy}{b(y)(R-y)^3} \quad (10)$$

Por “ r_e ” indicamos el radio de curvatura externo de la fibra más alejada del centro de curvatura. La expresión (10) surge energéticamente. Sin embargo, este factor “m” es motivo de controversia en la bibliografía aún para barras rectas^{12,13,14,15}. Nuestra propuesta es coherente con el planteo energético de Hamilton que abordaremos en el próximo ítem.

3 PLANTEO DEL PROBLEMA Y SISTEMA FUNDAMENTAL

Para utilizar el teorema de Hamilton deberemos considerar tres aportes energéticos, que nacen en una configuración genérica dada por $u=u(\alpha,t)$, $\theta=\theta(\alpha,t)$ $w=w(\alpha,t)$.

Sea el Lagrangiano:

$$\mathcal{L} \equiv U + L - K \quad (11)$$

Donde: U es la energía interna de deformación, L es la energía potencial o de posición de las cargas aplicadas y K es la energía cinética. Las expresiones de U, L y K pueden encontrarse en la referencia¹.

Para garantizar el movimiento real de un cuerpo debe anularse la variación primera en el tiempo del Lagrangiano.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} \, dt = 0 \quad (12)$$

t_0 y t_1 son dos instantes consecutivos arbitrarios, donde debe imponerse la restricción:

$$|\delta u|_{t_0,t_1} = |\delta \theta|_{t_0,t_1} = |\delta w|_{t_0,t_1} = 0 \quad (13)$$

Aplicando entonces (11) e integrando por partes hasta factorar las variaciones “ δ_u ”, “ δ_w ” y “ δ_θ ” dentro de las integrales, hallamos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$Q_\alpha + N - a^2 \ddot{u} = -R p_r \quad (a)$$

$$N_\alpha - Q - a^2 \left[\ddot{w} - qr \ddot{\theta} \right] = -R p_t \quad (b) \quad (14)$$

$$\frac{M_\alpha}{R} - Q - a^2 \left[k^2 R \ddot{\theta} - q \ddot{w} \right] = -\mu \quad (c)$$

$$\text{donde: } a^2 \equiv \rho A \gamma R \quad (15)$$

El sistema (14) en u, w y θ , funciones de “ α ” y “ t ”, constituyen las ecuaciones fundamentales que gobiernan el movimiento de un arco grueso con todos los aportes considerados.

Además tienen que cumplirse las siguientes condiciones de borde:

$$|M\delta\theta|_{\alpha_i}^{\alpha_d} + |N\delta w|_{\alpha_i}^{\alpha_d} + |Q\delta u|_{\alpha_i}^{\alpha_d} = 0 \quad (16)$$

donde “ α_i ” y “ α_d ” son los valores de la coordenada espacial “ α ” en los extremos izquierdo y derecho respectivamente.

Antes de pasar al problema de vibraciones libres, digamos que las ecuaciones de movimiento (14) tienen como característica principal el acople que se produce dinámicamente entre el corrimiento tangencial y el giro flexional. Dentro de la Resistencia de Materiales son las ecuaciones más generales posibles.

4 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE VIBRACIONES LINEALES

Liberando de cargas aplicadas a la barra curva ($p_r=p_t=\mu=0$) y admitiendo modos normales de vibración de frecuencia circular “ ω ” e introduciendo el siguiente parámetro adimensional de frecuencia

$$\Omega^2 \equiv \gamma \frac{\rho A}{EJ} \omega^2 R^4 \quad (17)$$

el sistema (14) podrá escribirse simbólicamente como

$$\mathcal{L}_1^*(u) + \mathcal{P}_1^*(w) + \mathcal{G}_1^*(R\theta) = 0 \quad (a)$$

$$\mathcal{L}_2^*(u) + \mathcal{P}_2^*(w) + \mathcal{G}_2^*(R\theta) = 0 \quad (b) \quad (18)$$

$$\mathcal{L}_3^*(u) + \mathcal{P}_3^*(w) + \mathcal{G}_3^*(R\theta) = 0 \quad (c)$$

donde los operadores diferenciales $\mathcal{L}^*(\cdot)$, $\mathcal{P}^*(\cdot)$ y $\mathcal{G}^*(\cdot)$ valen

$$\mathcal{L}_1^*(\cdot) \equiv k_\varepsilon^2(\cdot)_{\alpha\alpha} - k_\varphi^2(1 - k_\varepsilon^2 \Omega^2)(\cdot) \quad (a)$$

$$\mathcal{P}_1^*(\cdot) \equiv (k_\varepsilon^2 + k_\varphi^2)(\cdot)_\alpha \equiv \mathcal{L}_2^*(\cdot) \quad (b)$$

$$\mathcal{G}_1^*(\cdot) \equiv k_\varepsilon^2(\cdot)_\alpha \equiv \mathcal{L}_3^*(\cdot) \quad (c) \quad (19)$$

$$\mathcal{P}_2^*(\cdot) \equiv -k_\varphi^2(\cdot)_{\alpha\alpha} + k_\varepsilon^2(1 - k_\varphi^2 \Omega^2)(\cdot) \quad (d)$$

$$\mathcal{G}_2^*(\cdot) \equiv k_\varepsilon^2(1 + q k_\varphi^2 \Omega^2)(\cdot) \equiv \mathcal{P}_3^*(\cdot) \quad (e)$$

$$\mathcal{G}_3^*(\cdot) \equiv -k_\varepsilon^2 k_\varphi^2(\cdot)_{\alpha\alpha} + k_\varepsilon^2(1 - k_\varphi^2 \Omega^2)(\cdot) \quad (f)$$

Se ha convenido en introducir la nomenclatura siguiente:

$$k_\varepsilon^2 \equiv \frac{\varepsilon}{jR^2} = \frac{J}{AR^2} = \gamma - 1 \quad (a)$$

$$k^2 \equiv \frac{\varphi}{jR^2} = 2m(1 - \nu)k_\varepsilon^2 = 2m(1 + \nu)(\gamma - 1) \quad (b) \quad (20)$$

Debe tenerse en cuenta que ahora $u = u(\alpha)$, $w = w(\alpha)$ y $\theta = \theta(\alpha)$ son las formas modales y nos hemos independizado del tiempo. Seguiremos la metodología de las referencias^{8,9}. Definimos

$$x \equiv \frac{\alpha - \alpha_i}{\alpha_0} \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (21)$$

donde $\alpha_0 \equiv \alpha_d - \alpha_i$ es la abertura total del arco; observemos que

$$(\cdot)_\alpha = \frac{(\cdot)_x}{\alpha_0} \quad (22)$$

Vamos a imponer que los 3 corrimientos “u”, “w” y “θ” sean series de potencias de “x” (utilizaremos $(\cdot)' \equiv \frac{d(\cdot)}{dx}$; $(\cdot)'' \equiv \frac{d^2(\cdot)}{dx^2}$; etc.)

$$u = u(x) = \sum_{i_0} A_i x^i \quad (a)$$

$$w = w(x) = \sum_{i_0} B_i x^i \quad (b) \quad (23)$$

$$R\theta = R\theta(x) = \sum_{i_0} C_i x^i \quad (c)$$

donde las series teóricamente se extienden hasta el infinito; en la práctica inevitablemente serán series finitas de (M+1) términos. En general

$$i_n \Rightarrow i = n, n + 1, n + 2, \dots, M \quad (24)$$

A_i, B_i, C_i y w son las incógnitas de nuestro problema diferencial.

El sistema homogéneo a resolver de donde se obtendrán las distintas frecuencias naturales y correspondientemente sus formas modales es similar al (18) sólo que adimensionalizado por (20) y (21) quedando

$$\mathcal{L}_1(u) + \mathcal{P}_1(w) + \mathcal{G}_1(R\theta) = 0 \quad (a)$$

$$\mathcal{L}_2(u) + \mathcal{P}_2(w) + \mathcal{G}_2(R\theta) = 0 \quad (b) \quad (25)$$

$$\mathcal{L}_3(u) + \mathcal{P}_3(w) + \mathcal{G}_3(R\theta) = 0 \quad (c)$$

donde (con $j=1, 2, 3$):

$$\mathcal{L}_j(\cdot) \equiv \alpha_0^2 \mathcal{L}_j^*(\cdot) \quad (a); \quad \mathcal{P}_j(\cdot) \equiv \alpha_0^2 \mathcal{P}_j^*(\cdot) \quad (b); \quad \mathcal{G}_j(\cdot) \equiv \alpha_0^2 \mathcal{G}_j^*(\cdot) \quad (c) \quad (26)$$

teniendo en cuenta que las derivadas k-ésimas pueden escribirse como:

$$u^{(k)} = \sum_{i_0} \frac{(i+k)!}{i!} A_{i+k} x^i \quad (a)$$

$$w^{(k)} = \sum_{i_0} \frac{(i+k)!}{i!} B_{i+k} x^i \quad (b) \quad (27)$$

$$(R\theta)^{(k)} = \sum_{i_0} \frac{(i+k)!}{i!} C_{i+k} x^i \quad (c)$$

y reemplazando en el sistema (25) hallaremos las siguientes recurrencias, igualando los factores de cada x^i (con $i=0, 1, 2, \dots$):

$$A_{i+2} = \frac{\alpha_0^2 k_\varphi^2 (1 - k_\varepsilon^2 \Omega^2) A_i - \alpha_0 (i+1) (k_\varepsilon^2 + k_\varphi^2) B_{i+1} - \alpha_0^2 (i+1) k_\varepsilon^2 C_{i+1}}{(i+1)(i+2)k_\varphi^2} \quad (a)$$

$$B_{i+2} = \frac{\alpha_0^2 k_\varepsilon^2 (1 - k_\varphi^2 \Omega^2) B_i + \alpha_0 (i+1) (k_\varepsilon^2 + k_\varphi^2) A_{i+1} + \alpha_0^2 k_\varepsilon^2 (1 + q k_\varphi^2 \Omega^2) C_i}{(i+1)(i+2)k_\varphi^2} \quad (b) \quad (28)$$

$$C_{i+2} = \frac{\alpha_0^2 (1 - k^2 k_\varphi^2 \Omega^2) C_i + \alpha_0 (i+1) A_{i+1} + \alpha_0^2 (1 + q k_\varphi^2 \Omega^2) B_i}{(i+1)(i+2)k_\varphi^2} \quad (c)$$

($i=0, 1, 2, \dots, M-2$)

El procedimiento clásico de recurrencia algebraica es aplicado en este trabajo. El aporte original consiste en la sistematización de la metodología, que se detalla en un apéndice.

Como las recurrencias comienzan de A_2, B_2 y C_2 deben ser conocidas previamente para hallar cada solución las 6 constantes A_0, A_1, B_0, B_1, C_0 y C_1 . 3 (tres) de éstas se fijan con las C.B. en $x=0$ y la otras 3 (tres) C.B. en $x=1$ dan lugar a un sistema homogéneo de (3X3) de donde surge cada autovalor ω_k (o bien Ω_k)($k=1, 2, \dots$).

En realidad la imposición de las 6 C.B. homogéneas (3 en $x=0$ y 3 en $x=1$) da lugar generalmente a un sistema homogéneo de (6X6) en dichas 6 constantes cuyo determinante deberá anularse para obtener una solución matricial. Es un clásico problema de valores propios del cual se obtienen las frecuencias naturales y sus correspondientes formas modales. Para ciertas C.B. especiales como son los bordes articulados o empotrados se reduce el orden 6 del sistema a 2 de 3^{er} orden (uno de ellos elemental). En la barra libre (6 C.B. naturales) y las barras elásticamente apoyadas se debe anular un determinante de (6X6).

Consideremos los 3 casos clásicos para el borde $x=0$.

I: EMPOTRADO o sea:

$$u(0) = w(0) = \theta(0) = 0 \quad (29)$$

por (22) entonces :

$$\text{libres } A_1, B_1 \text{ y } C_1 \quad (a); \quad A_0 = B_0 = C_0 = 0 \quad (b) \quad (30)$$

II: ARTICULADO (sobre el eje neutro) o sea:

$$u(0) = w(0) = M(0) = 0 \quad (31)$$

Por (8) y por (22) entonces

$$\text{libres } A_1, B_1 \text{ y } C_0 \quad (a); \quad A_0 = B_0 = C_1 = 0 \quad (b) \quad (32)$$

III: LIBRE o sea:

$$M(0) = N(0) = Q(0) = 0 \quad (33)$$

por (8)

$$\theta'(0) = w'(0) - \alpha_0 u(0) = \alpha_0 (R\theta(0) + w(0)) + u'(0) = 0 \quad (34)$$

y por (22) (por ejemplo)

$$\text{libres } A_0, B_0 \text{ y } C_0 \quad (a); \quad A_1 = -\alpha_0(B_0 + C_0); B_1 = \alpha_0 A_0; C_1 = 0 \quad (b) \quad (35)$$

Al imponer las 3 C.B. en $x=1$ llegamos a un sistema lineal de (3X3) en las constantes que tenemos o elegimos como libres. Cada columna k -ésima ($k=1,2,3$) de la matriz de (3X3) se halla imponiendo las 3 C.B. y correspondientemente igualando a la unidad a la constante libre k -ésima y anulando las otras 2.

Para fijar ideas sea una cantilever con borde libre en $x=1$

$$M(1) = N(1) = Q(1) = 0 \quad (36)$$

o bien por (8)

$$\sum_{i_0} (i+1)C_{i+1} = 0 \quad (a)$$

$$\sum_{i_0} [(i+1)B_{i+1} - \alpha_0 A_i] = 0 \quad (b) \quad (37)$$

$$\sum_{i_0} [(i+1)A_{i+1} + \alpha_0(B_i + C_i)] = 0 \quad (c)$$

Por (30-a) tenemos como 1^a, 2^a y 3^a constante libre a A_1 , B_1 y C_1 respectivamente. Con (30-b) y $A_1=1$ y $B_1=C_1=0$ resolvemos las recurrencias (28) y reemplazamos en (37-a,b,c) hallando los 3 elementos de la primera columna. Análogamente con (30-b) y $A_1=C_1=0$ y $B_1=1$, resolviendo las recurrencias y con las (37) tendremos los 3 elementos de la 2^a columna. Finalmente con $A_1=B_1=0$ y $C_1=1$, y de igual forma con (40) los 3 elementos de la 3^a columna. Modificamos valores de Ω hasta anular el determinante de (3X3) hallando las frecuencias de un arco grueso en ménsula.

La potencialidad de esta metodología para resolver problemas de valores propios y formas modales –e innumerables problemas diferenciales fuertemente no lineales–, es sorprendente si la comparamos con la solución clásica¹. En el ítem de valores numéricos mostraremos en detalle el procedimiento para hallar las frecuencias en una barra gruesa curva y en un anillo grueso, ambos en el plano.

5 FRECUENCIAS DE ARCOS GRUESOS LIBRES.

Los valores que se presentan a continuación corresponden a arcos de abertura $\alpha = 60^\circ$. Las propiedades del material (acero) son: $\rho=7855 \text{ Kg/m}^3$, $E=1.9995 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, $\nu=0.29$.

Se comparan valores de frecuencias en Hertz, según el siguiente detalle: la primera columna corresponde a la solución del MEF con elementos 3D. Segunda columna: solución del MEF con elementos viga rectos, agregando los efectos de corte e inercia rotatoria. En la tercera columna se muestran los valores correspondientes a la solución presentada en este trabajo.

a) Sección transversal rectangular de dimensiones $0.09m \times 0.18m$. Factor de corte=1.20. En la tabla 1 se presentan los valores correspondientes a relaciones $h/R_G = 0.1$ y $h/R_G = 0.5$.

Tabla 1: sección rectangular

Modo	$h/R_G = 0.1$			$h/R_G = 0.5$		
	MEF (3D)	MEF (viga)	Presente trabajo	MEF (3D)	MEF (viga)	Presente Trabajo
1	245.66	244.94	245.70	4213.92	4075.57	4244.99
2	654.02	651.07	653.3	6573.15	7027.70	6649.87
3	1210.63	1203.26	1207.28	7414.32	7169.02	7463.00
4	1406.40	1410.27	1407.05	10602.72	10732.85	11010.10
5	1866.37	1851.24	1857.75	10902.14	10743.13	11307.69

Para arcos muy gruesos, con relaciones h/R_G mayores que 0.5, no son aplicables las ecuaciones deducidas en base al mantenimiento de secciones planas. Los resultados pierden precisión a medida que aumenta el valor de dicha relación.

En la solución con elementos 3D, se restringió el plano medio del arco, de modo de reproducir los modos planos de vibración solamente.

En la solución del MEF con elementos viga rectos, se tuvieron en cuenta los efectos del corte y de la inercia rotatoria (mediante el agregado de masas rotacionales concentradas). Aún así los valores de frecuencias difieren sensiblemente de las otras soluciones.

b) A continuación se presentan los valores de frecuencias para arcos con sección transversal doble T. El ancho y el alto son 0.09m y 0.18m respectivamente. El espesor del alma es 0.009m y el espesor del ala 0.014m. Se mantiene la misma abertura y material que en los casos anteriores. Los valores de la tabla 3 corresponden a las relaciones: $h/R_G = 0.1$ y $h/R_G = 0.5$.

Tabla 2: sección doble T

Modo	$h/R_G = 0.1$			$h/R_G = 0.5$		
	MEF (3D)	MEF (viga)	Presente Trabajo	MEF (3D)	MEF (viga)	Presente trabajo
1	323.71	319.55	323.24	3683.42	2771.21	4239.61
2	785.41	771.00	789.65	4429.68	3139.11	4862.43
3	1322.01	1298.79	1342.52	4900.28	5179.57	6091.96
4	1426.54	1410.09	1404.95	5160.79	5926.95	7858.65
5	1865.57	1840.71	1921.73	5397.38	7282.13	9247.05

Es importante destacar la diferencia que se presenta entre la solución del problema de vibraciones planas presentada en este trabajo, con el modelo tridimensional. Observando la

Figura 2, correspondiente al primer modo de vibración con $h/R_G = 0.5$, se advierte claramente la vibración localizada de las alas que influye disminuyendo los valores de las frecuencias. Esta diferencia se hace más notable a medida que aumenta la relación h/R_G y que evidentemente no puede tenerse en cuenta con la presente teoría ni con los elementos viga.

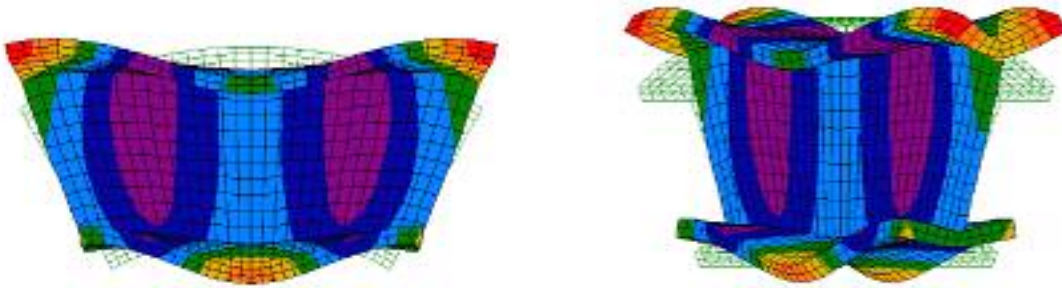


Figura 2: Modelo MEF ($h/R_G = 0.5$). Primer modo de vibración

6 FRECUENCIAS DE ANILLOS .

Los resultados de las frecuencias naturales de anillos fueron obtenidas para el modelo presentado en la referencia⁴ con el fin de comparar resultados. Se estudiaron los modos simétricos con un modelo de un cuarto del anillo con giros y desplazamientos tangenciales restringidos en coincidencia con los ejes (x,y). La sección transversal es rectangular con Area=altura=3 .

Datos del material: $E=3 \times 10^7$, $\rho=7.324 \times 10^{-4}$, $\nu=0.30$. (No se especifican unidades en los trabajos de referencia).

Tabla3: $h/R_G = 0.4$, factor de corte 1.19953

Modo	Resultados Ref[4]			MEF (3D)	MEF (2D)	MEF (viga)	Presente trabajo
	Elem. curvos	Elem. rectos	Estado plano				
1	1241.9	1235.5	1244.4	1238.64	1244.24	1178.39	1241.54
2	---	---	---	4298.67	4357.71	4294.82	4324.06
3	---	---	---	5467.57	5546.84	5060.07	5499.33

Tabla 4: $h/R_G = 1$, factor de corte 1.19662

Modo	Resultados Ref[4]			MEF (3D)	MEF (2D)	MEF (viga)	Presente trabajo
	Elem. curvos	Elem. rectos	Estado plano				
1	6225.9	6213.1	6331.1	6275.60	6276.12	5081.30	6218.85
2	---	---	---	11533.31	11543.18	10737.06	11254.02
3	---	---	---	18074.74	18082.13	16906.93	18985.62

En las tablas 3 y 4 se muestran los resultados de las frecuencias en Hertz para $h/R_G = 0.4$ y $h/R_G = 1$, respectivamente. Como se ha dicho, las frecuencias corresponden a modos simétricos de vibración. Se comparan resultados del MEF con elementos 3D, 2D y viga con el agregado de efecto de corte e inercia rotatoria.

Debe notarse que el elemento recto converge hacia valores menores que el elemento curvo⁴ y puede suponerse que da valores menores que la solución exacta. El estado plano está calculado con MEF, se sabe que da valores mayores que la solución exacta⁴.

A modo de ampliación se agregan los modos 2° y 3° que no se reportan en la referencia mencionada. La notable concordancia aún para relaciones h/R_G grandes entre las cinco teorías, se debe a que la hipótesis de mantenimiento de secciones planas es realista en el caso de vibración de anillos.

7 CONCLUSIONES

En la referencia [1] se resolvió con la solución clásica el problema de barras gruesas curvas con una complejidad algebraica notable frente a la presencia de raíces características complejas. En cambio, con la solución de series de potencias esto es evitado en forma sistemática obviando dicha dificultad.

Para arcos se concluyó que la aplicación de las teorías de Resistencia de Materiales, como la aquí presentada y la que corresponde a la formulación del elemento viga del MEF, carece de aplicabilidad para valores de la relación h/R_G que superen 0.5. En cambio, estas teorías son recomendables para el estudio de vibraciones de anillos donde la hipótesis de mantenimiento de secciones planas es aplicable.

8 REFERENCIAS

- [1] C. P. Filipich 1991 *Tesis Doctoral, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina. Vibraciones libres en su plano de arcos y anillos circunferenciales con distintas complejidades.*
- [2] A. E. Love 1944 *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity.* New York. Dover Publication.
- [3] R. Davis, R. Henshell and G. B. Warburton 1972 *Journal of Sound and Vibration* 25, 561-576. Constant curvature beam finite elements for in-plane vibrations.
- [4] R. E. Rossi 1988 *Elemento circular para el análisis dinámico de arcos empleando el método de elementos finitos.* Memorias VIII jornadas Argentinas de Ingeniería Estructural Tomo 1, 28 al 30 de septiembre.
- [5] R. E. Rossi 1989 *In-plane vibrations of circular rings of non-uniform cross-section with account taken of shear and rotatory inertia effects* *Journal of Sound and Vibration* 153(3) 443-452.
- [6] R. E. Rossi, P.A.Laura 1989 *Free, in-plane vibrations of circular rings with radial*

- supports taking into account shear and rotatory inertia effects* Journal of the Acoustical Society of America. 86(6), 2237-2243.
- [7] E. Romanelli 1983 *III Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural* Buenos Aires, Argentina. Tensiones de corte y tensiones radiales en barras curvas planas con estado general de sollicitación.
- [8] C.P.Filipich , M.B.Rosales y F.Buezas. *Analytical solutions for ordinary differential equations*. Proc. XII Congr. Num. Meth. And Appl. Córdoba, Argentina, 2001.
- [9] Filipich y Rosales, A recurrence solution of strongly non-linear dynamical systems. XXI Southeastern Conf. Theor. And Appl. Mech. Orlando, USA, 2002.
- [10] Filipich y Bambill Barras de gran curvatura, Apuntes de Cátedra (Elast. Y Plást.) . FRBB, UTN, 1998.
- [11] Belluzzi O. 1977 *Ciencia de la Construcción*. Editorial Aguilar, Madrid.
- [12] Timoshenko S. 1961 *Resistencia de Materiales de Materiales*. Editorial Espasa Calpe, Madrid.
- [13] R. D. Mindlin 1951 *Journal of Applied Mechanics Transactions ASME* 73, 31-38. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates.
- [14] G. R. Cowper 1966 *Journal of Applied Mechanics Transactions ASME* 33, 335-340. The shear coefficient in Timoshenko's beam theory.
- [15] E. Romanelli 1979 *XX Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural*. Córdoba, Argentina. El factor de cortadura y el alabeo.
- [16] Y. C. Fung 1968 *Foundations of Solid Mechanics* Prentice Hall of India Private Limited, New Delhi.
- [i] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, *The finite element method*, McGraw Hill, Vol. I, 1989, Vol. II, (1991).
- [i] S. Idelsohn and E. Oñate, "Finite element and finite volumes. Two good friends", *Int. J. Num. Meth. Engng*, 37, 3323-3341 (1994).

APÉNDICE A: Series de potencias.

Consideremos una función continua $f = f(x)$ con $0 \leq x \leq 1$. Escribimos la expansión en series de potencias como

$$[f] \equiv \sum_{k=0}^N a_{1k} x^k \quad (\text{A.1})$$

y para potencias m -ésimas

$$[f^m] \equiv \sum_{k=0}^N a_{mk} x^k \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (\text{A.2})$$

Para cumplir con la *condición de consistencia algebraica* (C.A.) se debe satisfacer la siguiente relación

$$[f^m] = [f^{m-1}][f] \quad (\text{A.3})$$

Después de reemplazar las series en cada factor de esta ecuación, se obtiene la siguiente expresión de recurrencia

$$a_{mk} = \sum_{p=0}^k a_{(m-1)p} a_{1(k-p)} \quad \text{o} \quad a_{mk} = \sum_{p=0}^k a_{(m-1)(k-p)} a_{1p} \quad (\text{A.4})$$

Ahora expandimos una función analítica $h = \hat{h}(y) = \hat{h}(y(x)) = h(x)$ en series de Taylor

$$\hat{h}(y) = \sum_{m=0}^M \alpha_m y^m \quad (\text{A.5})$$

donde α_m son conocidas. En particular, indicamos

$$[1] = \sum_{k=0}^N \delta_{0k} x^k \quad (\text{A.6})$$

donde $a_{0k} = \delta_{0k}$ y δ_{0k} son los deltas de Kronecker. Si sustituimos la ecuación (A.2) en la ecuación (A.5) (con $y(x) \equiv f(x)$), podemos escribir

$$[h(x)] = \sum_{k=0}^N \varphi_k x^k \quad \varphi_k = \sum_{m=0}^M \alpha_m a_{mk} \quad (\text{A.7})$$

Esta expresión será usada para cualquier función analítica.

Ahora si tenemos una función racional $\hat{F}(y)$

$$\hat{F}(y) = \frac{\hat{g}(y)}{\hat{h}(y)} = \frac{g(x)}{h(x)} = F(x) \quad (\text{A.8})$$

siendo $\hat{g}(y)$ y $\hat{h}(y)$ funciones analíticas y $\hat{h}(0) \neq 0$ y $\hat{g}(y) = \sum_{m=0}^M \beta_m y^m$ y β_m conocidas. Entonces se puede escribir

$$[g(x)] = \sum_{k=0}^N \varepsilon_k x^k \quad (\text{a}) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_k = \sum_{m=0}^M \beta_m a_{mk} \quad (\text{b}) \quad (\text{A.9})$$

Si denominamos

$$[F(x)] = \sum_{k=0}^N \lambda_k x^k \quad (\text{A.10})$$

Ahora la C.A. debe aplicarse

$$[F(x)][h(x)] = [g(x)] \quad (\text{A.11})$$

$$\left(\sum_{k=0}^N \lambda_k x^k \right) \left(\sum_{k=0}^N \varphi_k x^k \right) = \sum_{k=0}^N \varepsilon_k x^k \quad \text{donde} \quad \varepsilon_k = \sum_{p=0}^k \varphi_p \lambda_{(k-p)} \quad (\text{A.12})$$

Los λ_k son desconocidos y los conjuntos φ_k y ε_k son conocidos.

Es evidente que $\lambda_0 = \varepsilon_0 / \varphi_0$. Ahora la relación de recurrencia para λ_k es

$$\lambda_k = \frac{\varepsilon_k - \sum_{p=1}^k \varphi_p \lambda_{(k-p)}}{\varphi_0} \quad \text{donde} \quad \varphi_0 \neq 0 \quad \text{y} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (\text{A.13})$$

Debe notarse que $\varphi_0 \neq 0$ para que $F(0)$ exista.

También las expansiones pueden efectuarse alrededor de x_0 . En nuestro caso siempre $x_0 = 0$.