

## CÁLCULO DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE TENSIONES EN FISURAS DE INTERFASE 3D APLICANDO LA INTEGRAL DE ENERGÍA DE DOMINIO Y EL MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO

J. E. Ortiz, A. P. Cisilino y J. L. Otegui

Universidad Nacional de Mar del Plata – CONICET  
Av. Juan B. Justo 4302 (7600) Mar del Plata, Argentina  
e-mail: [jortiz@fi.mdp.edu.ar](mailto:jortiz@fi.mdp.edu.ar)

**Palabras claves:** Factor de Intensidad de Tensiones, Método de Elementos de Contorno, Fisuras de Interfase, Integral de Energía de dominio, Integral-M.

**Resumen.** *En este trabajo se presenta el cálculo del Factor de Intensidad de Tensiones para fisuras 3D en materiales homogéneos o en la interfase de materiales disímiles a partir la Integral J de dominio. Se implementa la formulación 3D del método de elementos de contorno por subdominios. Se han implementado elementos continuos y discontinuos a fin de modelar en forma precisa las discontinuidades en el campo de tracciones. Se incorporan estrategias de simetría y antisimetría implícita en la formulación con la finalidad de reducir la demanda de recursos computacionales. Las tensiones, deformaciones y derivadas de desplazamientos en puntos internos fueron evaluadas usando ecuaciones en integrales de contorno. Para obtener los modos individuales del factor de intensidad de tensiones en las fisuras se extendió la estrategia de la integral M en 2D inicialmente presentada por Yau y Wang<sup>1</sup> a la Integral J de dominio en 3D. Esta es evaluada a lo largo del frente de fisura tridimensional sobre dominios cilíndricos que rodean segmentos del frente de fisura. Asimismo se optimiza la selección del campo auxiliar de velocidades que introduce la propagación virtual de la fisura en la formulación de la integral de energía de dominio. La precisión de la implementación es demostrada resolviendo problemas con fisura solicitados en modo I y II, en materiales homogéneos y de fisuras en la interfase de bimateriales.*

## 1 INTRODUCCIÓN

La mayoría de los componentes o estructuras generalmente contienen defectos de varios tipos ó tamaños que por practicidad o razones económicas nunca son totalmente removidos. En otros casos, los defectos o fisuras pueden aparecer ocasionalmente debido a las condiciones en las que trabaja el componente. Aun en materiales con aplicaciones en industrias de alto riesgo los defectos suelen escapar a los métodos más rigurosos de inspección para luego hacerse presente durante la vida útil del componente, acortando el tiempo de servicio. La incidencia de los defectos en la integridad de la estructura puede ser evaluada mediante el conocimiento del factor de intensidad de tensiones. Es decir que el valor de este parámetro mide la criticidad de la falla por ello es importante el cálculo exacto de este parámetro fractomecánico.

El factor de intensidad de tensiones puede ser evaluado numéricamente mediante la técnica de desplazamientos en los nodos contiguos al vértice de fisura<sup>2</sup>. La estimación de su valor mediante este método depende de la exactitud local de los valores nodales de los desplazamientos. Esto obliga a usar modelos con una gran cantidad de elementos. El factor de intensidad de tensiones puede calcularse también en forma indirecta mediante métodos energéticos como con la integral J de dominio<sup>3</sup>. Sin embargo el método no permite calcular los factores de intensidad de tensiones a modo I, II y III cuando en el cuerpo esta sometido a estados de carga combinados. Para tal caso es preciso descomponer el campo de tensiones en sus componentes simétricas y antisimétricas. A diferencia de cuerpos homogéneos fisurados, las fisuras en una interfase bimaterial siempre induce a un comportamiento de apertura, corte y torsión aun cuando el cuerpo este sometido a un modo individual de carga. Los modos de falla debido a este efecto no son cuantificables por los métodos antes citados.

En este trabajo se presenta el cálculo del Factor de Intensidad de Tensiones para fisuras 3D en materiales homogéneos o en la interfase de materiales disímiles a partir la Integral J de dominio. Para obtener los modos individuales de este parámetro se extendió la estrategia de la integral M en 2D a la Integral J de dominio en 3D. La integral M es una extensión de la integral J de contorno que utiliza un campo auxiliar para descomponer los modos individuales del factor de intensidad de tensiones. Fue originalmente propuesta por Chen y Shield<sup>4</sup> para fisuras en materiales homogéneas y luego extendida por Yau y Wang<sup>1</sup> a fisuras en interfase 2D.

La integral M es evaluada a lo largo del frente de la fisura tridimensional sobre dominios cilíndricos alrededor de segmentos del frente de fisura. Asimismo se optimiza la selección del campo auxiliar de velocidades que introduce la propagación virtual de la fisura en la formulación de la integral de energía de dominio. Los modelos se realizaron mediante el método de elementos de contorno (MEC) por subdominios separados por interfases. La efectividad de esta formulación ha sido ampliamente probada para modelar cuerpos fisurados<sup>5</sup>. El MEC es idealmente adecuado para la evaluación de la integral J de dominio ya que el cómputo de tensiones, deformaciones y derivadas de desplazamientos en puntos internos puede realizarse en forma directa sin discretizar el dominio. Se ha mostrado igualmente que el MEC produce mejores estimaciones para tensiones y deformaciones

comparado con otras técnicas numéricas<sup>3</sup>. Asimismo, se implementaron elementos continuos y discontinuos a fin de modelar en forma precisa las discontinuidades en el campo de tracciones. La incorporación de las condiciones de simetría y antisimetría implícita en la formulación permite reducir considerablemente recursos computacionales. La eficiencia del algoritmo es demostrada resolviendo problemas con fisura solicitados en modo I y II en materiales homogéneos y de fisuras en la interfase de bimateriales.

## 2 ANÁLISIS MEDIANTE EL MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO POR SUBDOMINIOS

Las ecuaciones básicas en integrales del método de elementos de contorno para problemas tridimensionales en elastostática esta dada por la identidad de Somigliana:

$$u_i(x') = \int_{\Gamma} U_{ij}(x', x) t_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} T_{ij}(x', x) u_j(x) d\Gamma(x) \quad (1)$$

donde  $x' = \{x'_1, x'_2, x'_3\}^T$  y  $x = \{x_1, x_2, x_3\}^T$  denota dos puntos sobre el contorno  $\Gamma$ ;  $t(x) = \{t_1(x), t_2(x), t_3(x)\}^T$  y  $u(x) = \{u_1(x), u_2(x), u_3(x)\}^T$  son los vectores sobre el contorno en tracción y desplazamientos respectivamente; y  $U_{ij}(x', x)$  y  $T_{ij}(x', x)$  son las soluciones fundamentales del problema<sup>2</sup>. Sin embargo, la aplicación de la ecuación (1) a problemas de sólidos con fisuras no es directa ya que produce un mal acondicionamiento en el sistema de ecuaciones generadas<sup>2</sup>. Aunque existen varias soluciones para este problema, evaluar al sólido por subdominios separados por interfases que contienen a la fisura es una alternativa adecuada que permite solucionar también el caso de fisuras que se encuentran en la interfase entre materiales disímiles. La aplicación de la ecuación (1) para cada subdominio genera sistemas de ecuaciones con el doble de grados de libertad sobre las interfases, ya que en esta superficie no se imponen condiciones de contorno. Adicionalmente las condiciones de continuidad en desplazamientos y de equilibrio sobre las interfases generan ecuaciones complementarias que permiten resolver el problema.

## 3 CONDICIONES DE SIMETRÍA Y ANTISIMETRÍA IMPLÍCITA

Si el cuerpo tiene simetría en su geometría, en sus propiedades mecánicas y en sus condiciones de apoyo con respecto a un plano interno, los cálculos numéricos y el análisis puede simplificarse considerablemente. Para ello, considérese inicialmente la simetría respecto al plano cartesiano  $yz$  y desdóblese la ecuación (1) en la siguiente forma:

$$u_i(x') = \int_{\Gamma_{x-}} [U_{ij}(x', x) t_j(x) - T_{ij}(x', x) u_j(x)] d\Gamma(x) + \int_{\Gamma_{x+}} [U_{ij}(x', x) t_j(x) - T_{ij}(x', x) u_j(x)] d\Gamma(x) \quad (2)$$

donde  $\Gamma_{x^-}$  y  $\Gamma_{x^+}$  son porciones del contorno  $\Gamma$  simétricas sí respecto al plano  $yz$ ; y  $\Gamma_{x^-} \cup \Gamma_{x^+} = \Gamma$ . Para el caso de cargas simétricas las componentes de los vectores  $\mathbf{p}^{x^-}$  y  $\mathbf{p}^{x^+}$  definidos sobre los contornos  $\Gamma_{x^-}$  y  $\Gamma_{x^+}$ , respectivamente, satisface la relación  $\mathbf{p}_1^{x^-} = -\mathbf{p}_1^{x^+}$ ,  $\mathbf{p}_2^{x^-} = \mathbf{p}_2^{x^+}$  y  $\mathbf{p}_3^{x^-} = \mathbf{p}_3^{x^+}$ , donde  $\mathbf{p}$  denota tracciones o desplazamientos sobre el contorno. Estas relaciones permiten eliminar las variables sobre el contorno  $\Gamma_{x^-}$  en la ecuación (2). Sin embargo las funciones  $U_{ij}$  y  $T_{ij}$  sobre el contorno  $\Gamma_{x^-}$  aun deben ser evaluadas. Estos cálculos pueden desarrollarse sobre la frontera  $\Gamma_{x^+}$  usando relaciones de simetría, por lo que solo se precisa la parte simétrica del modelo. De esta forma la ecuación final en integrales de contorno para un modelo con simetría respecto al plano  $yz$  puede escribirse:

$$u_i(x') = \int_{\Gamma_{x^+}} \bar{U}_{ij}(x', x) t_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma_{x^+}} \bar{T}_{ij}(x', x) u_j(x) d\Gamma(x) \quad (3)$$

donde:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{1j}(x', x) &= U_{1j}(x', x^{x^+}) - U_{1j}(x', x^{x^-}) \\ \bar{U}_{2j}(x', x) &= U_{2j}(x', x^{x^+}) + U_{2j}(x', x^{x^-}) \\ \bar{U}_{3j}(x', x) &= U_{3j}(x', x^{x^+}) + U_{3j}(x', x^{x^-}) \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $j=1,2,3$ . Expresiones similares deben considerarse para la función en tracción. El tratamiento anterior es similar cuando el modelo presenta simetría con respecto a otros planos. Así cuando el modelo tiene simetría respecto a los plano  $xy$ ,  $xz$  y  $yz$  solo la octava parte de este es considerada. Debe agregarse que en el caso de simetría explícita las superficies sobre los planos de simetría son modeladas, en la implementación actual estas superficies no son consideradas lo cual conlleva un importante ahorro computacional.

Para el caso de cargas antisimétricas las componentes del vector  $\mathbf{p}$  se pueden relacionar como sigue:  $\mathbf{p}_1^{x^-} = \mathbf{p}_1^{x^+}$ ,  $\mathbf{p}_2^{x^-} = -\mathbf{p}_2^{x^+}$  y  $\mathbf{p}_3^{x^-} = -\mathbf{p}_3^{x^+}$ . El procedimiento es similar al caso presentado para las cargas simétricas, con los integrandos en este caso dados por:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{1j}(x', x) &= U_{1j}(x', x^{x^+}) + U_{1j}(x', x^{x^-}) \\ \bar{U}_{2j}(x', x) &= U_{2j}(x', x^{x^+}) - U_{2j}(x', x^{x^-}) \\ \bar{U}_{3j}(x', x) &= U_{3j}(x', x^{x^+}) - U_{3j}(x', x^{x^-}) \end{aligned} \quad (5)$$

Finalmente cabe recordar que cualquier estado de cargas que actúan sobre dominios simétricos siempre puede descomponerse en una parte simétrica y una antisimétrica.

#### 4 ELEMENTOS IMPLEMENTADOS

Con el propósito de reproducir adecuadamente el comportamiento del campo de desplazamientos y de tensiones de la formulación del método de elementos de contorno se implementaron elementos cuadráticos continuos, semidiscontinuos y discontinuos<sup>3</sup>. La estrategia de discretización seguida en el presente trabajo se ilustra en la Figura 1.

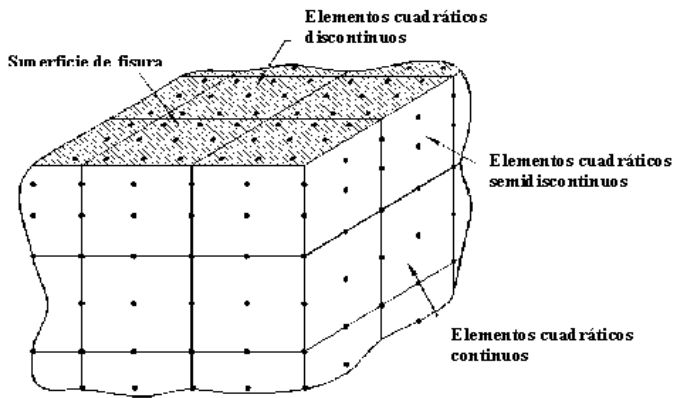


Figura 1: estrategia de discretización usada en el modelo

#### 5 LA INTEGRAL ENERGÍA DE DOMINIO

Considere un frente de fisura tridimensional definido localmente en la coordenada  $\eta$  con un sistema de coordenadas cartesianas representado en la Figura 2. La energía disipada en la extensión de superficie  $s$  de fisura en la dirección local  $x_I^*$  bajo condiciones cuasiestática está dada por:

$$\bar{J}_\eta = \int_V (\sigma_{ij}^* u_{ij}^* - w \delta_{ki}) q_{k,i} dV \quad (6)$$

donde  $w$  es la densidad de energía de deformación,  $\sigma_{ij}^*$  y  $u_{ij}^*$  son las componentes cartesianas

de tensión y deformación expresadas en el sistema local  $x^*$ ,  $V$  es cualquier volumen alrededor de la posición  $\eta$  para evaluar la energía de disipación y  $q_k$  es una función arbitraria lo suficientemente suave dentro del volumen  $V$ . Entonces, la disipación de energía por unidad de superficie esta representada por:

$$J = \frac{\overline{J_\eta}}{s} \tag{7}$$

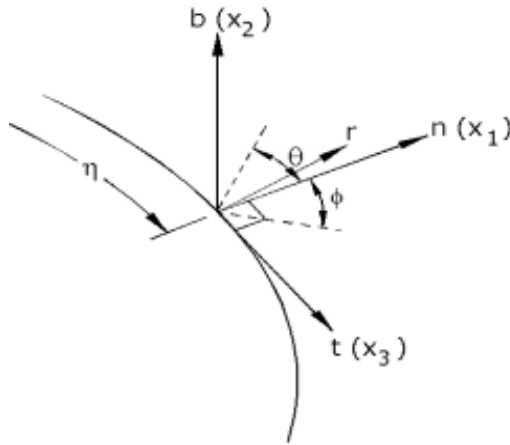


Figura 2: Coordenadas locales en el frente de fisura 3D

Nótese que la ecuación (6) es equivalente a la tasa de energía de disipación ( $G$ ) cuando  $q_k$  es interpretada como la función que modela el avance virtual de fisura<sup>6</sup>. Feijóo<sup>7</sup> interpreta a la función  $q_k$  como un campo de velocidades  $v$  analizando la variación de  $G$  mediante el análisis de sensibilidad para distintos campos de velocidades. Para minimizar el error introducido por un campo aproximado  $v_h$  se adopta un campo de velocidades independiente de cada malla definida sobre la extensión de fisura. Esto asegura que el orden de convergencia de  $G_h$  a  $G$  sea el doble que de  $v_h$  a  $v$ . Se puede probar que existe una familia de campo de velocidades que cumplen con esta condición. De hecho, si se asume un campo de velocidades con valores no nulos  $v(x_i)$  prescritos en el frente de fisura para los puntos  $\{x_i : 1 \leq i \leq NN\}$  y velocidades nulas en los puntos  $\{q_j : 1 \leq j \leq N\}$ , entonces el campo de velocidades queda definido a partir de promedios ponderados como sigue:

$$v(x) = \frac{\sum_{i=1}^{NN} w_i^p \|x - x_i\|^{-\beta} v(x_i)}{\sum_{i=1}^{NN} w_i^p \|x - x_i\|^{-\beta} + \sum_{j=1}^N w_j^{np} \|x - q_j\|^{-\beta}} \quad (8)$$

donde  $w_i^p$ ,  $w_i^{np}$  y  $\beta$  son parámetros a ser seleccionados. El campo de velocidades de la ecuación (8) satisface las hipótesis establecidas en el trabajo [7].

## 6 ANALISIS Y CALCULO DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE TENSIONES PARA FISURAS DE INTERFASE

En trabajos publicados entre otros por Williams<sup>8</sup>, Endorgan<sup>9</sup> y Rice<sup>10</sup> se describe un comportamiento oscilatorio para el campo de tensiones y desplazamientos en la vecindad del vértice de una fisura de interfase. Esto produce la interpenetración de un material en otro como una especie de arruga en la zona circundante al vértice de fisura. Comminuo<sup>11</sup> ha demostrado que el tamaño de esta zona depende del tipo de carga y de la diferencia entre las propiedades de los materiales. Sin embargo, logra establecer que la zona de contacto para la situación más desfavorable esta confinada una región extremadamente muy pequeña cercana del vértice de fisura. Numerosos autores<sup>12,13,14</sup> han despreciado el peso del efecto oscilatorio sobre la definición del factor de intensidad de tensiones y usualmente se adopta un campo de tensiones asintótico basado en la solución bidimensional (deformación plana y antiplana) en el vértice de la fisura de interfase<sup>15</sup>.

Basado en conceptos de energía de disipación, la relación entre la integral J y el factor de intensidad de tensiones para fisuras de interfases es:

$$J = \frac{I}{E^* \cosh^2(\pi \epsilon)} [K_I^2 + K_{II}^2] + \frac{I}{2\mu^*} K_{III}^2 \quad (9)$$

donde  $E^*$  y  $\mu^*$  son los módulos efectivos de deformación plana y corte, respectivamente, y están dados por:

$$\frac{I}{E^*} = \frac{I}{2} \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) \quad (10)$$

$$\frac{I}{\mu^*} = \frac{I}{2} \left( \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) \quad (11)$$

la constante bimaterial o índice oscilatorio  $\epsilon$  está dado por:

$$\epsilon = \ln \left[ \frac{k_1 \mu_2 + \mu_1}{k_2 \mu_1 + \mu_2} \right] \quad (12)$$

con  $k_\alpha = 3 - 4\nu_\alpha$ .

El factor de intensidad de tensiones para una fisura de interfase puede descomponerse en sus modos I, II y III usando el método propuesto originalmente por Chen y Wang<sup>4</sup> para fisuras de interfase bidimensionales usando la integral J de contorno. Aquí se presenta el método para fisura de interfase tridimensionales aplicando la integral J de dominio antes presentada.

Considérese dos estados de equilibrio para el mismo cuerpo en estudio, ambos se denotaran por supraíndices (1) y (2) sobre las variables de campo. Por superposición de dos estados de equilibrio el factor de intensidad de tensiones  $K^{(1+2)}$  puede escribirse como:

$$K_i^{(1+2)} = K_i^{(1)} + K_i^{(2)} \quad (i = I, II \text{ y } III) \tag{13}$$

La relación entre K y la integral J de dominio para el estado (1+2) de acuerdo a la expresión (9) es:

$$J^{(1+2)} = \frac{I}{E^* \cosh^2(\pi \epsilon)} \left[ K_I^{(1+2)^2} + K_{II}^{(1+2)^2} \right] + \frac{I}{2\mu^*} K_{III}^{(1+2)^2} \tag{14}$$

Reemplazando (13) en (14) y desarrollando apropiadamente:

$$\frac{2}{E^* \cosh^2(\pi \epsilon)} \left[ K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)} \right] + \frac{I}{2\mu^*} K_{III}^{(1)} K_{III}^{(2)} = J^{(1+2)} - J^{(1)} - J^{(2)} = M \tag{15}$$

M puede resolverse en términos de la integral J de dominio, reemplazando (6) en (15):

$$M = \int \left[ \sigma_y^{(1)} \frac{\partial u_j^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_y^{(2)} \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_1} - \sigma_{ki}^{(1)} \epsilon_{ki}^{(2)} \delta_{li} \right] \frac{\partial v_l}{\partial x_i} dV \tag{16}$$

Si se asume que el problema en estudio esta representado por el estado (1) y el estado (2) representa un problema auxiliar de solución conocida, las expresiones (15) y (16) permiten calcular los factores de intensidad de tensiones I, II y III. Para calcular  $K_I^{(1)}$  se asume  $K_I^{(2)}=1$ ,  $K_{II}^{(2)}=0$  y  $K_{III}^{(2)}=0$  en la solución auxiliar, mientras que para calcular  $K_{II}^{(1)}$  se adopta  $K_I^{(2)}=0$ ,  $K_{II}^{(2)}=1$  y  $K_{III}^{(2)}=0$ . Para  $K_{III}^{(1)}$  los valores son  $K_I^{(2)}=0$ ,  $K_{II}^{(2)}=0$  y  $K_{III}^{(2)}=1$ . Las expresiones finales son:

$$K_I^{(1)} = \frac{E^* \cosh^2(\pi \epsilon)}{2} M^a, \quad K_{II}^{(1)} = \frac{E^* \cosh^2(\pi \epsilon)}{2} M^b \text{ y } K_{III}^{(1)} = 2\mu^* M^c \tag{17}$$

Las integrales  $M^a$ ,  $M^b$  y  $M^c$  se determinan para los mismos juegos de valores en  $K_I^{(2)}$ ,  $K_{II}^{(2)}$  y  $K_{III}^{(2)}$  antes asumidos, respectivamente. Se puede adoptar como solución auxiliar el campo asintótico desarrollado en el vértice de una fisura de interfase en un medio infinito.



## 7 IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

La estimación de la integral  $M$  en punto cualquiera  $\eta$  sobre el frente de fisura es una etapa de postprocesamiento. El cálculo requiere de la evaluación de una integral de volumen dentro de un dominio que encierra a un segmento  $L_c$  del frente de fisura. Una forma natural de evaluar la integral  $M$  es hacer coincidir el punto  $\eta$  con los nodos del elemento sobre el frente de fisura mientras que la longitud  $L_c$  es tomada igual a los lados del elemento en referencia. La porción del modelo dentro del volumen  $V$  es discretizada en celdas con elementos tetraédricos isoparamétricos 3D con 27 nodos. Las tensiones, deformaciones y derivadas de desplazamientos dentro de este volumen deben estar referidas al sistema de coordenada locales  $x^*$  del frente de fisura ubicado en el punto  $\eta$ . La estrategia adoptada para implementar la integral  $M$  en el presente trabajo puede seguirse en el trabajo publicado por Cisilino<sup>3</sup> para el cálculo de la integral  $J$  de dominio.

## 8 RESULTADOS NUMERICOS

Con el propósito de validar el algoritmo propuesto para el cálculo del factor de intensidad de tensiones de fisuras en medios homogéneos o en la interfase de materiales disimiles, se propone evaluar fisuras solicitadas a modo I y II.

La primera probeta ensayada tiene una fisura central solicitada a modo I. El modelo esta compuesto por dos zonas de materiales homogéneos. Se aplica condiciones de simetría implícita en los ejes  $x$  y  $z$ , modelando solo las superficies formadas por líneas continuas, lo cual representa un cuarto del modelo original, ver Figura 3. Se uso 110 elementos cuadráticos y 555 nodos. Las dimensiones de la probeta guardan las siguientes relaciones:  $a/b=0.5$ ,  $w=a/10$  y  $h=3b$ . Los resultados numéricos para  $K_I$  se presentan normalizados respecto a  $\sigma(\pi a)^{1/2}$  en la Tabla 1. Se presentan valores para  $K_I$  en la superficie de la probeta y para el punto medio  $w/2$ , variando el volumen cilíndrico de evaluación de la integral  $M$  dada por el radio desde el vértice de fisura.

En la Tabla 2 se presentan los resultados para la probeta anterior de un solo material, el mismo modelo pero bajo condiciones de corte puro o solicitada en modo II. Los valores presentados están normalizados respecto  $\sigma(\pi a)^{1/2}$ . Se presentan valores de  $K_{II}$  para distintos radios de evaluación de la integral  $M$ .

Para el caso bimaterial se modeló una probeta con fisura lateral de borde solicitada a modo I, como se muestra en la Figura 3. Las dimensiones de la probeta están dadas por las siguientes relaciones:  $a/b=0.2$ ,  $w=a/10$  y  $h=3b$ . El modelo esta compuesto por dos zonas con módulo de elástico  $E_I=2E_{II}$  y coeficiente de Poisson  $\nu_I=\nu_{II}=0.3$ . En el modelo se uso el esquema de simetría implícita respecto al eje  $z$ , un total de 150 elementos y 731 nodos fueron usados. Los resultados normalizados respecto a  $\sigma(\pi a)^{1/2}$  se muestran en la Tabla 3. Los valores óptimos<sup>7</sup> para los coeficientes  $w_i^p$ ,  $w_i^{np}$  y  $\beta$  de la ecuación (8) fueron tomados igual a 1, 50 y 6, respectivamente.

Los resultados presentados muestran independencia para cualquier volumen considerado para evaluar la integral  $M$ . En la Tabla 3 se observa que el efecto bimaterial produce valores en  $K_{II}$  a pesar que la probeta esta solicitada a modo I. Los errores numéricos de los modelos evaluados publicados en las Tablas 1-3 muestran que al algoritmo propuesto como herramienta precisa y eficiente para el cálculo del factor de intensidad de tensiones en fisura en medios homogéneos o en interfase.

## 9 CONCLUSIONES

Se implementó exitosamente la formulación de elementos de contorno por subdominio en 3D que permite modelar sólidos con materiales homogéneos o disímiles que alojan fisuras en la interfase. Asimismo se incorporó dentro la formulación la estrategia de simetría o antisimetría implícita que permite un importante ahorro de recursos computacionales ya que solo se precisa discretizar la parte del modelo con simetría geométrica.

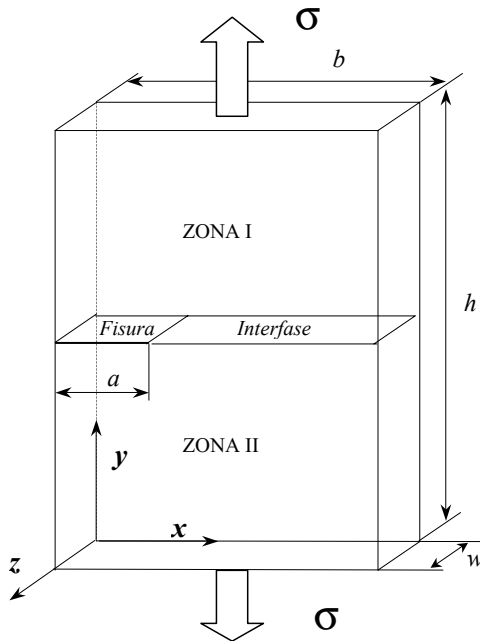


Figura 3: Geometría y dimensiones de la probeta ensayada

Se adaptó la función de velocidad de campo propuesta por Feijóo<sup>7</sup> que optimiza el cálculo de la integral J de dominio. Se logró implementar la estrategia de integral M como una extensión de la integral J de dominio para el cálculo del factor de intensidad de tensiones en fisura en 3D. La integral M implementada permite calcular en forma directa los factores de intensidad de tensiones tanto en fisuras en materiales homogéneos o en la interfase de materiales disímiles. Los resultados presentados muestran una independencia para cualquier volumen considerado para evaluar la integral M. En la Tabla 3 se observa que el efecto bimaterial produce valores en  $K_{II}$  a pesar que la probeta esta solicitada a modo I. Los errores numéricos de los modelos evaluados publicados en las Tablas 1-3 muestran que al algoritmo propuesto como herramienta precisa y eficiente para el cálculo del factor de intensidad de tensiones en fisura en medios homogéneos o en interfase.

		<i>radio/a</i>						Prom.	Ref.
		0.090	0.150	0.225	0.338	0.500	0.750		
Superf.	$K_I$	1.1911	1.1964	1.1980	1.1989	1.1993	1.1996	1.1985	1.1867 <sup>16</sup>
	$\Delta\%$	0.3708	0.8174	0.9522	1.0281	1.0618	1.0870	0.9901	
Interio r	$K_I$	1.1905	1.1963	1.1980	1.1989	1.1993	1.1996	1.1985	1.1867 <sup>16</sup>
	$\Delta\%$	0.3202	0.8090	0.9522	1.0281	1.0618	1.0870	0.9901	

Tabla 1: Resultados normalizados para  $K_I$  probeta compacta

		<i>radio/a</i>						Prom.	Ref.
		0.090	0.150	0.225	0.338	0.500	0.750		
Superf.	$K_{II}$	1.2467	1.2551	1.2566	1.2569	1.2571	1.2573	1.2568	1.2739 <sup>17</sup>
	$\Delta\%$	-2.1352	-1.4758	-1.3580	-1.3345	-1.3188	-1.3031	-1.346	
Interio r	$K_{II}$	1.2296	1.2353	1.2364	1.2366	1.2368	1.2368	1.2365	1.2739 <sup>17</sup>
	$\Delta\%$	-3.4775	-3.0301	-2.9437	-2.9280	-2.9123	-2.9123	-2.935	

Tabla 2: Resultados normalizados para  $K_{II}$  probeta compacta

	radio/a						Prom.	Ref.
	0.090	0.150	0.225	0.338	0.500	0.750		
$K_I$	1.4000	1.4111	1.4345	1.4428	1.4403	1.4467	1.4374	1.366 <sup>14</sup>
$\Delta\%$	2.4800	3.3016	5.0146	5.6223	5.4392	5.9078	5.2269	
$K_{II}$	0.1300	0.1312	0.1304	0.1316	0.1307	0.1320	0.1310	0.137 <sup>14</sup>
$\Delta\%$	-5.1095	-4.2336	-4.8175	-3.9416	-4.5985	-3.6496	-4.416	

Tabla 3: Resultados normalizados para  $K_I$  y  $K_{II}$  probeta bimaterial

## 10 AGRADECIMIENTOS

Los autores expresan sus agradecimientos al fondo PICT 12-04586 de la Agencia de Promoción Científica de la Republica Argentina por el financiamiento económico al presente trabajo. Asimismo al programa de becas internas de la Universidad Nacional de Mar del Plata por la asistencia económica, beca de formación superior.

## 11 REFERENCIAS

- [1] J. F. Yau and S. S. Wang, *An analysis of interface cracks between dissimilar isotropic materials using conservation integrals in elasticity*. Engng. Fract. Mech. 20, 423-432, 1984.
- [2] M. H. Aliabadi and D. P. Rooke, *Numerical Fracture Mechanics*, Kluwers Academic Publishers, Great Britain, 1992.
- [3] A. P. Cisilino, M. H. Aliabadi, J. L. Otegui, *Energy domain integral applied to solve center and double – edge problems in three-dimensions*, Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 29,181-194, 1998.
- [4] F. H. K. Chen and R. T. Shield, *Conservation laws in elasticity of the J-integral type*, J. apply Math. Phys. (ZAMP) 28, 1-22, 1977.
- [5] R. H. Rigby and M. H. Aliabadi, *Out-of-core Solver for Large, Multi-zone Boundary Element Matrices*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 38(9), 1507-1533, 1995.
- [6] T. L. Anderson, *Fracture Mechanics, Fundamental and Applications*. CRC Press, Boca Raton, 1995.
- [7] Roberto Saliba, Marcelo Venere, Claudio Padra, Edgardo Taroco and Raul Feijóo. *Shape*

- Sensitivity Analysis and Energy Release Rate of Planar Cracks Embedded in Three-Dimensional Bodies*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 188, 649-664, 2000.
- [8] M. L. Willians, *The Stress Around a Fault or Crack in Dissimilar Media*, Bull. Seismol. Soc. America, Vol. 49, pp. 199-204, 1959.
- [9] F. Endorgan, *Stress Distribution in Bounded Dissimilar Materials with Cracks*. J. App. Mech., Vol. 32, pp. 403-410, 1965.
- [10] J. R. Rice, *Elastic Fracture Mechanics Concepts for Interfacial Cracks*, J. Appl. Mech., Vol. 55, pp 98-103, 1988.
- [11] M. Comminuo, *The Interface Crack*, J. App. Mech., pp. 631-635, 1977.
- [12] R. Yuuki and S. Cho, *Efficient Boundary element Analysis of Stress Intensity Factor for Interface Cracks in Dissimilar Materials*, Eng. Fract. Mech., Vol. 34. No. 1, pp 179-188, 1989.
- [13] P. Sollero and M. Aliabadi, *Mechanics Analysis of Anisotropic Composite Laminates by the Boundary Element Method*, Int. J. Fract. Vol. 64, pp. 269-284, 1993.
- [14] N. Miyazaki, T. Ikeda and Munakata T., *Stress Intensity Factor Analysis of Interface Crack Using Boundary Element Method – Application of Contour Integral Method*, Eng. Fract. Mech., Vol. 45, pp. 599-610, 1993.
- [15] T. Nakamura, *Three-dimensional Stress Fields of Elastic Interface Cracks*, J. Appl. Mech., Vol. 58, pp. 939-946, 1991.
- [16] H. Tada, P. Paris and G. Irwin, *The stress Analysis of cracks handbook*, Third Edition, ASME PRESS, N. Y., 2000.
- [17] BEASY Version 8, *Software in boundary element method*, Mechanic Computational, U. K., 2000.