

## ELEMENTOS FINITOS HÍBRIDOS APLICADOS À ANÁLISE PLÁSTICA LIMITE DE PROBLEMAS DE ESTADO PLANO DE TENSÕES COM A UTILIZAÇÃO DOS CRITÉRIOS DE TRESCA E DE VON MISES

Márcio A. Roma Buzar, Paul William Partridge e Carmen Lucia Sahlit

Faculdade de Tecnologia  
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental  
Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil  
Universidade de Brasília  
70910-900 – Brasília, DF, Brasil.

**Palavras-chave:** Elementos Finitos Híbridos; Análise Plástica Limite; Estado Plano de Tensão; Programação Matemática.

**Resumo.** *Em muitas aplicações práticas na engenharia é de interesse se obter a máxima carga suportada pela estrutura, a partir da qual pode-se então determinar a carga conveniente de serviço que garanta uma margem de segurança adequada e que reduza o custo final da estrutura. A combinação do método dos elementos finitos, da análise plástica limite e da programação matemática tem se revelado uma alternativa eficiente para se determinar a carga de colapso numericamente. Objetiva-se no presente trabalho a obtenção da carga de colapso plástico para problemas de estado plano de tensões, através da aplicação do teorema estático da análise plástica limite considerando como válido o regime de pequenos deslocamentos. Empregam-se os critérios de plastificação de Tresca e de von Mises, utilizando-se uma representação poliédrica da superfície de escoamento e considerando a hipótese básica de plasticidade associada. Adota-se a formulação de elementos finitos híbridos com a consideração de variáveis primárias de tensão no domínio (energia potencial complementar) e de deslocamento na superfície dos elementos (energia potencial total). Esta formulação permite a construção de um elemento finito de quatro nós que produz resultados mais precisos tanto para as tensões quanto para os deslocamentos. Exemplos numéricos de vigas e chapas metálicas são apresentados e os resultados são comparados com outros existentes na literatura, levando-se em consideração o número de planos adotados na linearização dos critérios de ruptura.*

## 1 INTRODUÇÃO

Os elementos finitos híbridos foram introduzidos na década de sessenta e oferecem uma melhor precisão nos resultados referentes a deslocamentos e tensões de que aqueles obtidos utilizando a formulação de deslocamento<sup>1, 2, 3, 4</sup>. Atualmente os modelos híbridos de elementos finitos representam uma importante área de pesquisa na construção de elementos finitos de alta performance<sup>5, 6</sup> e têm sido aplicados com sucesso a diversos problemas de engenharia. Neste trabalho utiliza-se o modelo híbrido na obtenção de carga de colapso para problemas de estado plano de tensões. Uma das vantagens das formulações híbridas e mistas de elementos finitos é o fato de que as mesmas satisfazem separadamente as condições de equilíbrio, compatibilidade e material, permitindo executar a análise plástica limite via programação matemática diretamente<sup>7, 8, 9, 10</sup>. Nas referidas formulações híbridas e mistas, a relação de equilíbrio é obtida de forma direta já que as tensões são variáveis primárias.

Neste trabalho empregam-se os critérios de plastificação de Tresca e de von Mises, que são expressões não lineares se expressas em termo de tensões nominais. A utilização dessas expressões na análise plástica limite leva à obtenção de um sistema governante na forma de um problema de programação não linear (PNL). Estas expressões são linearizadas no presente trabalho de modo a se trabalhar com sistemas governantes na forma de problemas de programação matemática linear (PLs).

Na primeira parte deste trabalho descreve-se a teoria de modelos de elementos finitos híbridos e a formulação discreta com a obtenção da matriz de equilíbrio. Em seguida mostram-se os critérios de plastificação de Tresca e de von Mises bem como a técnica de linearização empregada. Introduce-se o teorema estático da análise plástica limite para modelos de elementos finitos híbridos e por último apresentam-se as aplicações numéricas.

## 2 FORMULAÇÃO EM MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS HÍBRIDOS

Funcionais híbridos têm um ou mais campos primários que são definidos somente na interface ou contorno do elemento. Princípios variacionais híbridos representam uma importante extensão dos princípios clássicos da mecânica. Esta extensão constitui uma tentativa de aprimorar os modelos de elementos finitos<sup>10, 11, 12</sup>.

O primeiro elemento híbrido era bastante limitado por não ser capaz de tratar problemas não lineares e dinâmicos. Entretanto, tais limitações foram gradualmente superadas com o entendimento e a evolução dos conceitos básicos. A adoção de elementos finitos híbridos no presente trabalho foi motivada pelo fato de o elemento finito híbrido quadrilátero de quatro nós ser provavelmente o elemento de finito mais preciso em uma ampla gama de problemas de tensão e deformação plana<sup>5</sup>.

## 2.1 Equação de Equilíbrio

O funcional utilizado na obtenção do elemento híbrido é obtido pela soma de outros dois funcionais, ou seja, o funcional no interior (domínio) e o potencial de interface (contorno). A expressão (1) representa o funcional utilizado em elementos híbridos de tensão<sup>3,6</sup>:

$$\pi_c^u(\sigma_{ij}, u_i) = -U_c + W_d = -\frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} D_{ijkl} \sigma_{kl} dV + \int_S u_i \sigma_{ij} n_j dS - \int_{S_t} u_i \hat{t}_i dS_t \quad (1)$$

onde  $\pi_c^u(\sigma_{ij}, u_i)$  é o funcional de campo múltiplo híbrido ( $\sigma$  e  $u$ );  $U_c$  é a energia complementar em termos das tensões;  $W_d$  é o trabalho potencial;  $\sigma$  é o tensor de tensões;  $D$  é o tensor da relação constitutiva;  $u$  é o vetor de deslocamentos;  $V$  é o volume;  $S$  é a superfície;  $S_t$  é a parte da superfície onde existem carregamentos e  $\hat{t}$  é o vetor de forças de superfície prescritas.

O subscrito  $i, j, k, l$  pode variar de um a três referindo-se às direções das coordenadas  $x, y, z$ , respectivamente. Índices repetidos tem o sentido de somatório de acordo com a notação indicial usual.

O funcional apresentado na expressão (1) pode ser aplicado na construção do elemento finito híbrido da figura 1.

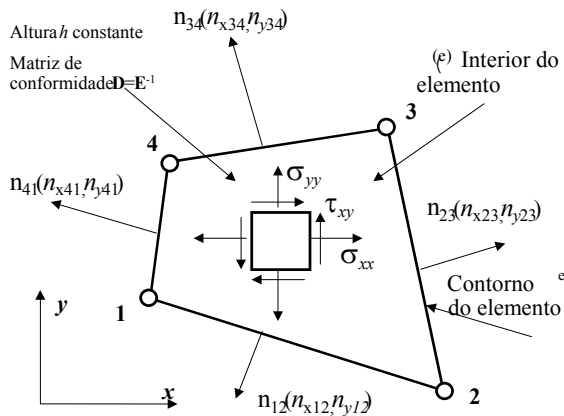


Figura 1: elemento quadrilátero bilinear de tensão plana<sup>3</sup>.

Na figura 1, o funcional no domínio é definido no elemento plano 1-2-3-4, enquanto o funcional de potencial de interface é definido em quatro elementos unidimensionais 1-2, 2-3, 3-4, e 4-1, que coincidem com os lados do elemento plano.

### 2.1.1 Campo de Tensões

Para a construção do elemento híbrido considera-se primeiro o campo de tensões internas, definido no elemento plano 1-2-3-4, que se constitui uma variável primária. Assume-se que cada componente do campo de tensão ( $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$ ) varie linearmente em  $x$  e  $y$ , ou seja,

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \alpha_1 + \alpha_4 x + \alpha_5 y \\ \sigma_{yy} &= \alpha_2 + \alpha_6 x + \alpha_7 y \\ \sigma_{xy} &= \alpha_3 + \alpha_8 x + \alpha_9 y\end{aligned}\tag{2}$$

Os  $\alpha_i$  ( $i = 1,2,\dots,9$ ) são chamados de *parâmetros de amplitude de tensão* ou simplesmente *parâmetros de tensão*, sendo  $x$  e  $y$  o sistema de coordenadas generalizadas. Como este campo deve satisfazer a equação de equilíbrio com força de corpo zero, tem-se:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0\tag{3a}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0\tag{3b}$$

Escrevendo-se na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x & y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 1 & -y & 0 & 0 & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \end{bmatrix}\tag{4}$$

ou

$$\sigma = \Psi \alpha\tag{5}$$

### 2.1.2 Deslocamento no Contorno

Em seguida consideram-se os deslocamentos  $d_i$  no contorno, definidos nos elementos unidimensionais 1-2, 2-3, 3-4, e 4-1. Em cada elemento unidimensional os deslocamentos dependem somente dos nós daquele elemento, porém devem ser compatíveis com os

elementos unidimensionais adjacentes. Esta restrição pode ser satisfeita por uma interpolação linear dos deslocamentos ao longo de cada elemento unidimensional, como

$$\begin{bmatrix} \dot{d}_{x12} \\ \dot{d}_{y12} \\ \dot{d}_{x23} \\ \vdots \\ \dot{d}_{y41} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-\xi_{12} & 0 & 1+\xi_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\xi_{12} & 0 & 1+\xi_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\xi_{23} & 0 & 1+\xi_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1+\xi_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\xi_{41} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_{x1} \\ \dot{u}_{y1} \\ \dot{u}_{x2} \\ \vdots \\ \dot{u}_{y4} \end{bmatrix} \quad (6)$$

onde  $\xi_{ij}$  são as coordenadas isoparamétricas do elemento linear. Esta equação pode ser escrita na forma matricial:

$$\dot{d} = \Phi \dot{u} \quad (7)$$

onde  $\Phi$  é uma matriz (8x8).

### 2.1.3 Forças de Superfície

A força de superfície definida como  $t_i = \sigma_{ij} n_j$  é associada com o campo de tensões que aparece no potencial de interface. Para um campo de tensão bidimensional nas coordenadas  $(x, y)$ , as componentes de forças de superfície são:

$$t_x = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y \quad (8a)$$

$$t_y = \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y \quad (8b)$$

Escrevendo (8) para o lado 1-2, conforme a figura 1, e levando-se em conta a relação (7), chega-se a

$$\begin{bmatrix} t_{x12} \\ t_{y12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{x12} & 0 & n_{y12} \\ 0 & n_{y12} & n_{x12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = N_{12} \sigma_{12} = N_{12} \Psi_{12} \alpha \quad (9)$$

onde  $\Psi_{12}$  é  $\Psi$  calculado sobre o lado1-2. Repetindo esta construção para os outros três lados obtém-se a relação

$$t = T \alpha \quad (10)$$

sendo  $\mathbf{t}$  um vetor de oito componentes de força, que são funções das coordenadas da matriz  $\Psi$  escrita em (5), ou seja,

$$\mathbf{t} = [t_{x12} \quad t_{y12} \quad t_{x23} \quad t_{y23} \quad \dots \quad t_{y41}]^T \quad (11)$$

$T$  é uma matriz (8x7), composta de quatro sub-matrizes (2x7) que são  $N_{12}\Psi_{12}$ ,  $N_{23}\Psi_{23}$ ,  $N_{34}\Psi_{34}$  e  $N_{41}\Psi_{41}$ .

### 2.1.4 Forças de Superfície Prescritas

Quando uma força atua sobre o elemento conforme figura 1, ela é considerada como força de superfície prescrita, sendo definida por unidade de comprimento do lado do elemento e da espessura do mesmo. Elas são agrupadas de forma vetorial como

$$\hat{\mathbf{t}} = [\hat{t}_{x12} \quad \hat{t}_{y12} \quad \hat{t}_{x23} \quad \hat{t}_{y23} \quad \dots \quad \hat{t}_{y41}]^T \quad (12)$$

### 2.1.5 Formulação Discreta

Para o problema de análise plástica limite, assume-se o carregamento como sendo proporcional. O vetor de cargas é então formado por uma parcela fixa e outra variável, escrevendo-se

$$\mathbf{P} = \lambda \mathbf{P}_v + \mathbf{P}_f \quad (13)$$

onde  $\lambda$  é o fator de carga,  $\mathbf{P}_v$  é o vetor de cargas variáveis e  $\mathbf{P}_f$  é o vetor de cargas fixas.

Levando em conta que, no colapso, as taxas de deformação elástica são nulas e substituindo as expressões (5), (7) e (10) no funcional (1), agora escrito para todo o domínio e contorno do problema discretizado tem-se

$$\pi_c^u = \alpha^T \mathbf{G} \dot{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{P}}^T \dot{\mathbf{u}} \quad (14)$$

onde  $\mathbf{G}$  é dado por

$$\mathbf{G} = \int_{(e)} \mathbf{T}^T \Phi d\Gamma \quad (15)$$

Fazendo  $\pi_c^d$  estacionário em relação aos deslocamentos, tem-se

$$\frac{\partial \pi_c^u}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = \mathbf{G} \alpha - \bar{\mathbf{P}}^T = 0 \quad (16)$$

ou

$$\mathbf{G} \alpha = \bar{\mathbf{P}}^T \quad (17)$$

A expressão (17) é uma relação de equilíbrio entre as cargas nodais  $\bar{\mathbf{P}}$  e os parâmetros de tensão  $\alpha$ , sendo  $\mathbf{G}$  uma matriz de equilíbrio em termos dos parâmetros de tensão, integrada no contorno.

### 3 CRITÉRIOS DE PLASTIFICAÇÃO

A seguir descrevem-se os critérios de plastificação de Tresca e de von Mises bem como as suas respectivas linearizações.

#### 3.1 Critério de Plastificação de Tresca

De acordo com este critério, a plastificação pode ocorrer quando for atingido o valor extremo da tensão de cisalhamento. Qualquer estado de tensão localizado dentro da superfície de escoamento é considerado como um estado de tensão elástico. Nesta teoria, as tensões de escoamento para a tração e a compressão são assumidas iguais, o que representa uma limitação para uma série de materiais<sup>13</sup>.

A máxima tensão de cisalhamento no ensaio uniaxial é igual a  $\sigma_o/2$ , onde  $\sigma_o$  é a tensão de escoamento. O critério de Tresca pode ser expresso em termos das tensões principais como

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{\pm \sigma_o}{2} \quad (18a)$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) = \frac{\pm \sigma_o}{2} \quad (18b)$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1) = \frac{\pm \sigma_o}{2} \quad (18c)$$

onde  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  são a maior, a intermediária e a menor tensão principal, respectivamente.

##### 3.1.1 Caso de Tensões Planas

Como no caso de tensões planas, as tensões são independentes de  $\sigma_3$ , o critério reduz-se a

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \sigma_o \quad (19)$$

A figura 2 ilustra o critério de Tresca, para o estado plano de tensões, em função das tensões principais e da tensão de escoamento do material.

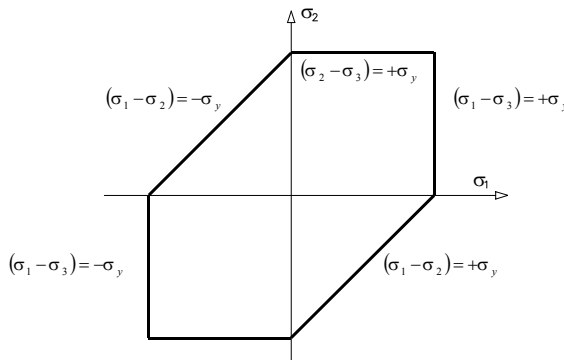


Figura 2: Critério de escoamento de Tresca para o estado plano de tensões.

A superfície de escoamento de Tresca, escrita em função das tensões nominais, torna-se

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = \sigma_o^2 \quad (20)$$

A utilização da expressão (20) na análise plástica limite leva à obtenção de um sistema governante na forma de um problema de programação não linear (PNL). Esta expressão pode ser linearizada de modo a se trabalhar com sistemas governantes na forma de problemas de programação matemática linear (PLs). Utilizando uma superfície de ruptura linearizada<sup>14, 15, 16, 17, 18</sup>, as condições de escoamento, em um ponto qualquer do corpo, são expressas como

$$\mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma} \leq \sigma^* \quad (21)$$

onde  $\mathbf{n}$  é a matriz de normalidade e  $\sigma^*$  é o vetor das capacidades plásticas.

No presente trabalho, a expressão (20) foi linearizada da mesma forma utilizada para linearizar a superfície de Mohr-Coulomb, conforme descrito em<sup>19 e 20</sup>, tomando-se o ângulo de atrito como  $\phi = 0^\circ$  e a coesão como a tensão de escoamento do material  $c = \sigma_o$ . Na figura 3 mostra-se o critério de Tresca para o estado plano de tensões em função das tensões nominais  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ .

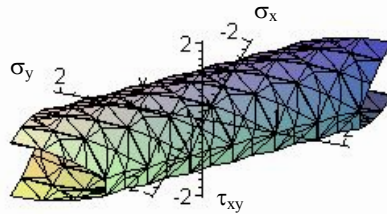


Figura 3: Critério de Tresca para o estado plano de tensões em função das tensões nominais.

### 3.2 Critério de Plastificação de von Mises

Este critério assume que o escoamento começa quando a energia de distorção atinge um valor igual à energia de distorção de escoamento em um ensaio de tração simples. O critério foi sugerido por von Mises em 1913 e é também conhecido como teorema da energia distorcional. O critério pode ser expresso usando o segundo invariante do tensor desviatório como

$$J_{2D} < k^2 \quad \text{caso o material esteja no regime elástico} \quad (22)$$

$$J_{2D} = k^2 \quad \text{caso o material esteja plastificando} \quad (23)$$



onde  $k$  é uma propriedade do material a ser definida em ensaios experimentais. Pode-se demonstrar que para um material isotrópico

$$k = \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} \quad (24)$$

onde  $\sigma_o$  é a tensão de escoamento do material.

Pode-se escrever o segundo invariante do tensor desviador como

$$J_{2D} = J_2 - \frac{1}{6}J_1^2 \quad (25)$$

onde  $J_1$  e  $J_2$  são o primeiro e o segundo invariante do tensor de tensão respectivamente.

Expandindo a expressão (23) em termos das componentes de tensões principais, pode-se escrever o segundo invariante do tensor desviador como

$$\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = k^2 \quad (26)$$

### 3.2.1 Caso de Tensões Planas

Para o caso especial de tensões planas, onde  $\sigma_3 = 0$ , o critério de ruptura de von Mises, em função das tensões principais, fica

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2)^2 + (\sigma_1)^2 = 6k^2 \quad (27)$$

Substituindo o valor da constante  $k$  na expressão acima, chega-se a

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_o^2 \quad (28)$$

A expressão (28) pode ser interpretada no espaço como uma elipse em função de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  do plano de tensão, sendo escrita na forma

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_o}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_o}\right)\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_o}\right) + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_o}\right)^2 = 1 \quad (29)$$

A equação (29) é a conhecida expressão da elipse de von Mises para o estado de tensão plana<sup>13</sup>. Esta equação pode ser escrita em função das tensões nominais como

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_o^2 \quad (30)$$

### 3.2.2 Linearização da Superfície de von Mises

Para se reduzir e simplificar a equação (30), pode-se empregar a rotação de eixos em sistemas cartesianos ortogonais<sup>21</sup>. No intuito de eliminar o termo cruzado ( $\sigma_x\sigma_y$ ) da equação (30), determina-se o ângulo  $\theta$  de rotação de tal forma que

$$A\sigma_x^2 + 2B\sigma_x\sigma_y + C\sigma_y^2 + D\tau_{xy}^2 = \sigma_o^2 \quad (31)$$

sendo

$$tg(2\theta) = \frac{2B}{A-C} \quad (32)$$

Levando-se em consideração (31) e (32), pode-se verificar que a expressão (30) é satisfeita quando  $\theta = 45^\circ$ . Além disso, a referida expressão, considerando-se a simplificação adotada, pode ser escrita como

$$\frac{1}{2}\sigma_x^2 + \frac{3}{2}\sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_o^2 \quad (33)$$

Desta maneira, a equação (33) permite determinar os pontos de intersecção com os eixos de origem, para auxiliar a definição dos planos de linearização. O elipsóide da figura 4, gerado pela expressão (30), ilustra a forma final da equação da superfície de von Mises para um problema de estado plano de tensões.

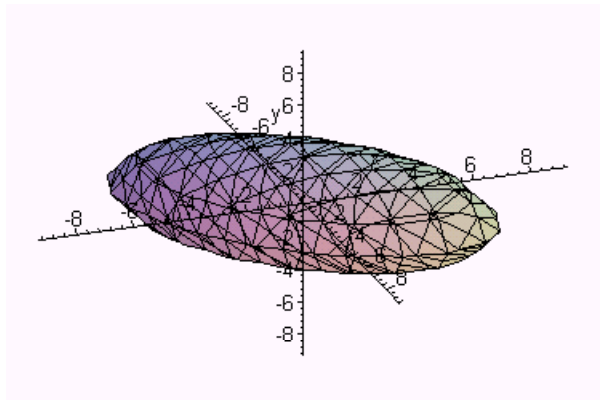


Figura 4: Elipsóide da superfície de plastificação de von Mises para um problema de estado plano de tensões.

Para a linearização da superfície de von Mises considerou-se inicialmente um oitavo do elipsóide, utilizando-se 1, 2, 4 ou 9 planos como mostrado na figura 5. Usando estes planos como base e através de uma matriz de sinais, geraram-se sistemas de 8, 16, 32 e 72 planos, respectivamente, para o elipsóide completo.

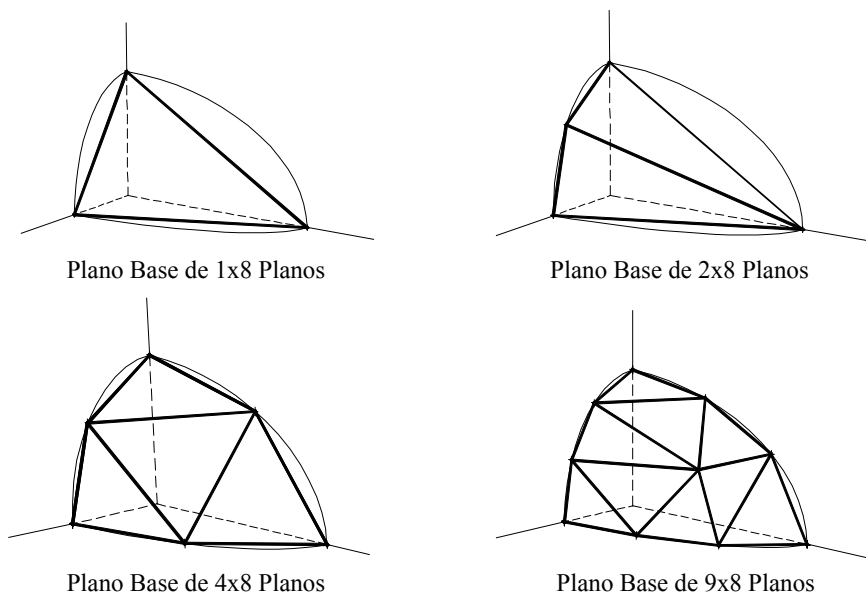


Figura 5: Planos base utilizados para linearizar a superfície de von Mises

Na figura 6 mostram-se as superfícies de Tresca e de von Mises para o estado de tensões planas considerando-se as tensões nominais.

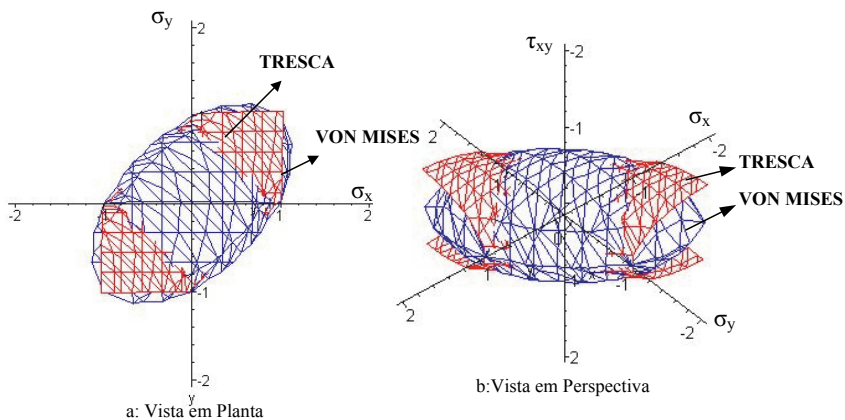


Figura 6: Superfícies de Tresca e de von Mises para o estado plano de tensões.

Na figura 6, as superfícies de Tresca e de von Mises são consideradas utilizando-se tensões nominais. Na figura 6a, mostra-se à vista superior de ambas as superfícies, em relação aos eixos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ , verificando-se que a superfície de Tresca aparece inscrita na de von Mises, como ocorre quando as superfícies são apresentadas graficamente em termos de tensões principais. Entretanto, considerando-se as superfícies desenhadas em perspectiva, neste caso em relação aos eixos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ , pode-se verificar na figura 6b que a superfície de von Mises aparece inscrita na de Tresca, nos trechos próximos às extremidades das mesmas. A utilização dos dois critérios em problemas de análise plástica limite será apresentada nos exemplos numéricos.

Pode-se então definir as condições de resistência em um ponto qualquer do sistema estrutural, utilizando-se uma representação poliédrica da superfície de ruptura, conforme a figura 5, como

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ A_n & B_n & C_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \dots \\ D_n \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma} \leq \boldsymbol{\sigma}^* \quad (34)$$

onde  $\mathbf{n}$  é a matriz de normalidade e  $\boldsymbol{\sigma}^*$  é o vetor das capacidades plásticas.

As condições de plastificação expressas em (34) são funções da tensão  $\boldsymbol{\sigma}$ . Assim, para que seja possível a montagem do problema de programação linear equivalente ao critério estático da análise plástica limite é necessário substituir (5) em (34), chegando-se a

$$\mathbf{n}^T \Psi \boldsymbol{\alpha} \leq \boldsymbol{\sigma}^* \quad (35)$$

#### 4 TEOREMA ESTÁTICO DA ANÁLISE PLÁSTICA LIMITE PARA ELEMENTOS FINITOS HIBRIDOS

Com a relação de equilíbrio (17) e as condições de resistência (35), obtém-se o problema de programação linear associado ao critério estático como

$$\text{Maximizar} \quad \lambda \quad (36a)$$

$$\text{Sujeito a} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{n}^T \Psi \\ \mathbf{P}_v & -\mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^* \\ \mathbf{P}_f \end{bmatrix} \quad (36b)$$

No presente trabalho, os problemas de programação linear associados ao teorema estático, obtidos por meio da representação poliédrica da superfície de ruptura em hiperplanos<sup>10, 14</sup> foram resolvidos utilizando-se o software comercial LINDO (Linear INteractive Discrete Optimizer)<sup>17</sup>, versão 5.3.

## 5. APLICAÇÕES NUMÉRICAS

### 5.1 Chapa com Furo na Lateral

Neste exemplo pretende-se obter o fator de carga de uma chapa com furos nas laterais, apresentada na figura 7, considerando-se que a tensão de escoamento seja  $\sigma_0 = 1$  KPa e que o peso próprio seja desprezível. A solução analítica para um problema similar de chapa com furos semi-circulares é fornecida por Kaliszky<sup>22</sup>. Foram utilizadas três malhas de elementos finitos híbridos para discretizar a geometria. O problema é analisado considerando-se o critério de escoamento de Tresca. Os resultados obtidos com o programa de elementos finitos híbridos são comparados com aqueles obtidos com um código de elementos finitos mistos, que também utiliza elemento bilinear. O código computacional para elementos finitos híbridos foi elaborado utilizando-se o software Visual Fortran<sup>23</sup>.

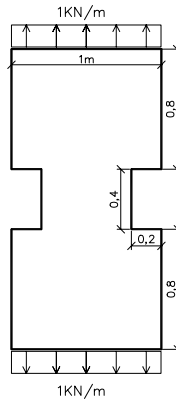


Figura 7: Geometria e carregamento da chapa com furo nas laterais.

Na figura 8, apresentam-se as três malhas utilizadas para a discretização do problema.

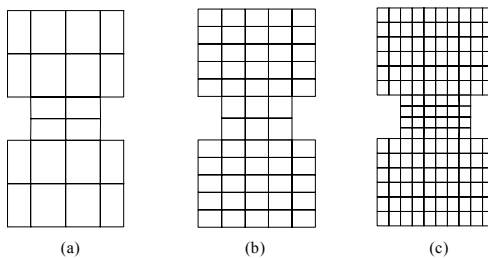


Figura 8: Discretizações adotadas para o elemento finito híbrido de quatro nós (Q4 Híbrido): (a) malha Q4/1 com 33 nós e 20 elementos, (b) malha Q4/2 com 76 nós e 50 elementos, (c) malha Q4/3 com 175 nós e 140 elementos.

Na Tabela 1 comparam-se os resultados obtidos com um programa de elementos finitos híbridos e um programa que utiliza a formulação de elementos finitos mistos<sup>24</sup>, considerando-se a superfície de escoamento de Tresca. A análise da referida tabela mostra que os valores de fator de carga de colapso encontrados pelo programa elaborado com a teoria dos elementos finitos híbridos convergem para uma solução próxima àquela encontrada utilizando-se o programa de elementos finitos mistos<sup>24</sup>, sendo a diferença máxima entre os valores fornecidos pelos dois códigos computacionais de aproximadamente 3%.

Tabela 1: Fator de carga de colapso em função da malha em elementos finitos (NN = número de nós; NE = número de elementos) e do número de planos de linearização da superfície de escoamento.

CRITÉRIO DE TRESCA					
NN	NE	8 PLANOS		16 PLANOS	
		HÍBRIDO	MISTO	HÍBRIDO	MISTO
33	20	0,71	0,70	0,73	0,71
76	50	0,71	0,69	0,73	0,70
175	144	0,69	0,67	0,71	0,69

A tendência de convergência dos resultados, utilizando-se elementos finitos híbridos e mistos, para o caso em questão, pode ser melhor visualizada na figura 9.

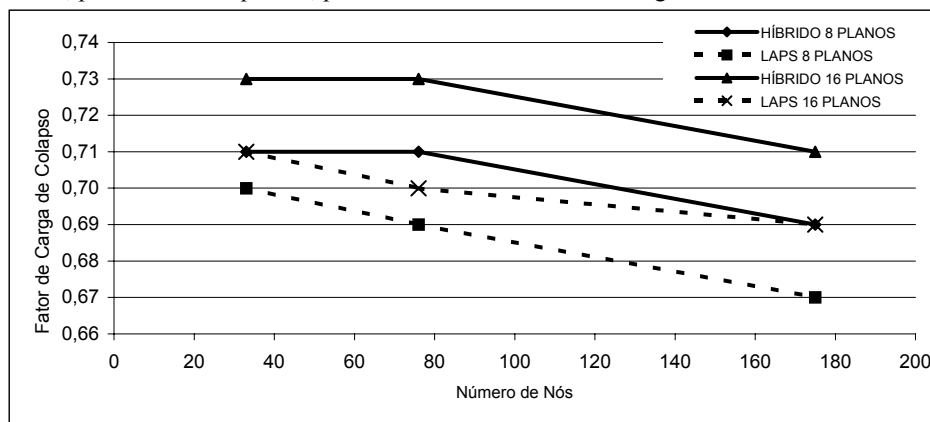


Figura 9: Convergência de resultados em função do número de nós da malha e do número de planos de linearização, com a utilização da superfície de escoamento de Tresca.

No exemplo 5.1 os resultados obtidos pelos modelos híbridos e mistos são equivalentes, notando-se que os modelos híbridos dão resultados ligeiramente mais rígidos que os modelos mistos. A análise do problema mostra que há convergência dos resultados para o caso de

linearização da superfície de Tresca com 16 planos tanto para os modelos híbridos quanto para os modelos mistos, verificando-se também convergência dos resultados em relação às malhas adotadas.

O resultado analítico do fator de carga de colapso fornecido por Kaliszky<sup>22</sup> para o caso de chapa com furos semicirculares e carga distribuída, que é de 0.73, se comparado com os resultados encontrados com os modelos híbridos e mistos que são 0.71 e 0.69 respectivamente, indica uma grande coerência dos resultados obtidos no presente trabalho.

## 5.2 Viga Metálica

Procura-se obter a carga de colapso de uma viga metálica simplesmente apoiada sujeita à carga concentrada, tendo tensão de escoamento  $f_y=235\text{MPa}$  e espessura de 10mm. As soluções de referência são fornecidas em Olsen<sup>25</sup>, sendo as propriedades geométricas e mecânicas da viga descritas na figura 10. Discretiza-se somente metade do domínio devido à simetria do problema analisado. Foram geradas oito malhas distintas para se avaliar a convergência dos resultados. Consideram-se as superfícies de escoamento de Tresca e de von Mises com linearizações de 8, 16, 32 e 72 planos. Os resultados obtidos com o programa de elementos finitos híbridos são comparados com aqueles obtidos com o código de elementos finitos mistos<sup>24</sup>.

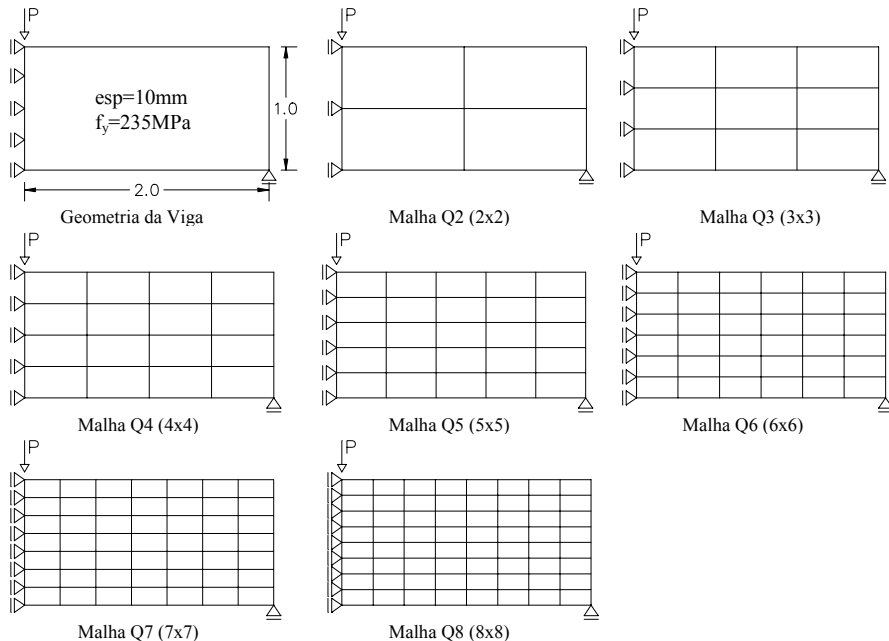


Figura 10: Discretização adotada para viga utilizando-se elementos finitos híbridos e mistos de quatro nós.

Nas tabelas 2 e 3 comparam-se os resultados obtidos com os programas de elementos finitos híbridos e mistos, considerando-se os critérios de escoamento de Tresca e de von Mises. O valor analítico da capacidade de carga considerando a teoria de viga simples é de 294KN e de 320KN quando se considera o ajuste do fator de carga, conforme apresentado em Olsen<sup>25</sup>.

Tabela 2: Resultados da capacidade de carga obtidos com os programas de elementos finitos híbridos e mistos utilizando-se a superfície de Tresca.

MALHA	NN	NE	CRITÉRIO	8 PLANOS		16 PLANOS		32 PLANOS		72 PLANOS	
				HIBRIDO	MISTO	HIBRIDO	MISTO	HIBRIDO	MISTO	HIBRIDO	MISTO
Q2	9	4	T R E S C A	738	652	764	666	770	670	770	672
Q3	16	9		722	852	748	876	758	880	758	882
Q4	25	16		690	694	728	720	734	722	736	724
Q5	36	25		550	598	572	614	576	620	578	622
Q6	49	36		650	662	676	686	682	692	xxx	694
Q7	64	49		618	670	656	698	666	704	xxx	706
Q8	81	64		542	636	576	664	xxx	670	xxx	672

Na tabela acima, apresentam-se os resultados obtidos para a carga de colapso da viga, considerando-se o critério de escoamento de Tresca. A análise da referida tabela indica que os valores obtidos com os programas de elementos finitos híbridos e mistos, para determinadas malhas, têm valores muito próximos. Observa-se ainda na referida tabela que há necessidade, no presente exemplo, de malhas mais refinadas para convergir os resultados, tanto para o caso de modelos híbridos quanto para os modelos mistos.

Com relação a linearização da superfície de Tresca, observa-se que os resultados para o caso de 16 planos já são satisfatórios e convergentes, como acontece no exemplo 5.1. Nota-se que os modelos híbridos dão resultados menos rígidos que os modelos mistos, ao contrário do que ocorre no exemplo 5.1.

Considerando-se ainda uma malha de 200 elementos, portanto uma malha mais refinada que a malha Q8, obtém-se para a carga de colapso o valor de 344KN, com uma diferença de apenas 6% em relação à solução apresentada por Olsen<sup>25</sup>.

Tabela 3: Resultados da capacidade de carga obtidos com os programas de elementos finitos híbridos e mistos utilizando-se a superfície de von Mises.

MALHA	NN	NE	CRITÉRIO	8 PLANOS		16 PLANOS		32 PLANOS		72 PLANOS	
				HIBRIDO	MISTO	HIBRIDO	MISTO	HIBRIDO	MISTO	HIBRIDO	MISTO
Q2	9	4	M I S E S	482	492	460	556	668	596	722	630
Q3	16	9		500	490	584	558	664	634	690	660
Q4	25	16		472	470	556	532	624	576	656	600
Q5	36	25		470	464	550	514	612	574	632	584
Q6	49	36		454	432	526	492	594	520	xxx	534
Q7	64	49		454	378	522	460	576	462	xxx	490
Q8	81	64		428	332	496	426	xxx	410	xxx	442



Apresentam-se na tabela 3 os resultados encontrados para a capacidade de carga da viga, utilizando-se a superfície de plastificação de von Mises. Observa-se novamente a necessidade de malhas refinadas para convergir os resultados tanto para o caso de modelos híbridos quanto para os modelos mistos. Em relação à representação poliédrica da superfície de von Mises, verifica-se que tanto para os modelos híbridos quanto para os modelos mistos necessita-se de um número maior de planos para linearizar a superfície, conforme descrito em Olsen<sup>25</sup>.

Observou-se, em todos os exemplos estudados, que o elemento finito híbrido fornece cargas de colapso plástico muito próximas às soluções de referência. Em todos os casos analisados, um fator limitante, para execução das análises, foi a capacidade da versão do software de otimização utilizado. Uma forma de minimizar este problema consiste em se utilizar como pontos de controle da plasticidade os nós da malha, ao invés dos pontos de Gauss utilizados no presente trabalho, visando a redução da dimensão do sistema governante. A presente pesquisa desenvolve-se nesta direção, com o objetivo de tornar a utilização do elemento híbrido na análise plástica limite mais eficiente.

## 6 CONCLUSÕES

Apresentou-se no presente trabalho uma formulação para análise plástica limite de problemas de estado plano de tensões, com a utilização de modelos de elementos finitos híbridos com variáveis primárias de tensões no domínio e de deslocamento na superfície do elemento<sup>26</sup>. Verificou-se que o elemento finito híbrido de quatro nós, adotado no presente trabalho, produz resultados semelhante aos obtidos com a utilização de elementos finitos mistos.

Foram empregados sistemas de linearização das superfícies de plastificação. No caso de Tresca, o esquema utilizado é similar àquele empregado anteriormente para Mohr-Coulomb<sup>19, 20, 26</sup>. No caso do critério de von Mises geraram-se conjuntos com números crescentes de planos para esta finalidade. Notou-se que, empregando-se tensões nominais, parte da superfície de Tresca fica inscrita na superfície de von Mises, mas para outra parte a situação inverte-se.

No caso de chapa sob tração necessitou-se um número menor de elementos para resolver o problema<sup>26</sup> do que no caso da viga. Neste último caso, a versão do software, LINDO 5.3, disponível aos autores se tornou uma limitação para resolver malhas mais refinadas. Estudo com um maior número de graus de liberdade serão apresentados em trabalhos futuros.

## Referências Bibliográficas

- [1] PIAN, T. H. H. *Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distributions*. AIAAJ., **2**, pp 1333-1336, (1964).
- [2] PIAN, T. H. H. *State-of-the-Art Development of Hibrid/Mixed Finite Element Method*. Finite Element in Analysis and Design, **21**, 5-20, (1995).
- [3] FELIPPA, C. A. *Advanced Finite Element Methods* (ASEN 5367) – Department of Aerospace Engineering Structures, University of Colorado at Boulder, Colorado, (2000).
- [4] PIAN, T. H. H. & SUMIHARA K. *Rational Approach for Assumed Stress Finite Elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, **20**, 1685-1895, (1984.).
- [5] ZIENKIEWICZ, O. C. & TAYLOR R. L. *El Método de los Elementos Finitos I e II*, 4 Ed., McGraw-Hill, Madrid, (1995).
- [6] PIAN, T. H. H. & TONG P. *Basis of Finite Element Methods for Solid Continua*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, **1**, 3-28, (1969).
- [7] MUNRO I. J. SMITH D. L. *Linear Programming Duality in Plastic Analysis and Synthesis*. International Symposium on Computer-Aided Structural Design, (1972).
- [8] NEAL B. G. *The Plastic Methods of Structural Analysis*. Chapman and Hall. London, (1977).
- [9] HORNE M. R. *Plastic Theory of Structures*. Pergamon Press. Oxford, (1979).
- [10] SMITH, D. L. *Plastic Limit Analysis, Mathematical Programming Methods in Structural Plasticity*, ed. D. Lloyd Smith (ed.), Springer-Verlag, Vienna, chapter 5, 61-82, (1990).
- [11] REDDY, J. N. *An Introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill, 2rd Ed. New York, (1993).
- [12] REDDY, J. N. *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics*, John Wiley, 2rd Ed. New York, (1986).
- [13] DESAI C. S. & SIRIWARDANE H. J. *Constitutive Laws for Engineering Materials*. Prentice-Hall. New Jersey, (1984).
- [14] SAHLIT, C. L. *Mathematical Programming Methods for Dynamically Loaded Rigid-Plastic Framed Structures*, PhD. Thesis, Department of Civil Engineering, Imperial College, University of London, London, (1992).
- [15] MELLO, E. L. & SAHLIT, C. L. *Análise Elastoplástica das Estruturas*, Apostilas do Curso de Mestrado em Engenharia Civil, UnB, Brasília, (1993).
- [16] MAIER, G. A quadratic programming approach for certain classes of nonlinear structural problems, *Meccanica*, **3**:121-130, (1968).
- [17] SCHRAGE L. *LINDO User's Manual – Release 5.0*. the Scientific Press. San Francisco, (1991).
- [18] SANTOS DA SILVA, L. *Análise Elástica e Elastoplástica de Placas de Reissner-Mindlin Submetidas a Excitações Estáticas e Dinâmicas*, Dissertação de Mestrado, Publicação EDM 001A/97, Departamento de Engenharia Civil, Universidade de

- Brasília, Brasília, DF, (1997).
- [19] SANTOS DA SILVA, L., SAHLIT, C. L. & FARIAS M. M. *Aplicação da Análise Plástica Limite aos Métodos Probabilísticos em Geotecnia*. Anais do XX Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos Computacionais para Engenharia (XX CILAMCE), São Paulo, (1999).
- [20] SANTOS DA SILVA, L., FARIAS, M. M. & SAHLIT, C. L. *Plastic Limit Analysis in Geotechnics using the Finite Element Method plus Linear and Non Linear Mathematical Programming*, Proceedings of the Seventh International Symposium on Numerical Models in Geomechanics (VII NUMOG), Graz., 215-220, (1999).
- [21] SANTOS SILVINO B. C. *Noções sobre a Teoria Geral das Cônicas*. Ed. Universidade de Minas Gerais. Belo Horizonte, (1969).
- [22] KALISZKY S. *Plasticity Theory and Engineering Applications*. Akadémiai Budapest. 1a. Ed. Budapest, (1989).
- [23] COMPAQ VISUAL FORTRAN. *Programmer's Guide: Compaq Visual Fortran Professional Edition 6.1.0*. [Digital Equipment Corporation](#), (1999).
- [24] SANTOS DA SILVA L. FARIAS M. M. & SAHLIT C.L. *Software com Interface Gráfica Iterativa para Análise Plástica Limite*. Anais do Simpósio Brasileiro de Aplicações de Informática em Geotécnica (INFOGEO), 56, Curitiba, (2001).
- [25] OLSEN P. C. *Rigid-Plastic Finite Element Analysis of Steel Plates, Structural Girders and Connections*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **191**, 761-781, (2001).
- [26] BUZAR M. A R., PARTRIDGE P. W., SAHLIT C. L. *Aplicação De Elementos Finitos Híbridos De Tensão À Análise Plástica Limite De Problemas De Estado Plano De Tensão*. XXX Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural. Brasília, (2001).