

UNA FUNCIÓN GENERALIZADA DE ALABEO PARA EL ANÁLISIS DINÁMICO DE VIGAS DE PARED DELGADA COMPUESTAS

Pablo G. Girón* y Víctor H. Cortínez*

* Grupo Análisis de Sistemas Mecánicos
Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Bahía Blanca
11 de Abril, Bahía Blanca, 8000, Buenos Aires, Argentina
e-mail: vcortine@frbb.utn.edu.ar

Palabras claves: vigas de pared delgada, materiales compuestos, función de alabeo, elementos finitos.

Resumen. *Este trabajo presenta una función de alabeo generalizada que permite describir el comportamiento de vigas de pared delgada de materiales compuestos. La misma consiste en una generalización del modelo desarrollado por Aleksandar Prokic aplicándolo al estudio de la dinámica de los elementos estructurales citados en el párrafo anterior. Se presenta un elemento finito desarrollado en base a esta teoría, y se aplica el mismo a la obtención de frecuencias y modos de vibración en distintos tipos de viga de pared delgada, tanto isótropas como anisótropas.*

1 INTRODUCCIÓN

La utilización creciente de estructuras construidas con materiales compuestos, debido a su alta resistencia en relación con su peso, ha estimulado el desarrollo de teorías refinadas para su análisis estático y dinámico que contemplan la anisotropía de este tipo de materiales. Una considerable cantidad de investigaciones se han centrado en el desarrollo de teorías avanzadas para el análisis de placas y láminas compuestas. Menor atención se le ha dado a las estructuras tipo viga, las que encuentran importante aplicación en la industria aeroespacial y en robótica entre otras. Por otra parte existen relativamente pocos ejemplos de estudios dinámicos de miembros estructurales de materiales compuestos a través de modelos tipo viga, ya que la mayoría de los trabajos consideran solo el comportamiento estático de los mismos.

Entre los modelos teóricos desarrollados para vigas de pared delgada, la teoría de Vlasov¹ describe el comportamiento de estos miembros estructurales construidos con materiales isotropos y homogéneos de sección abierta. Una teoría análoga para vigas de sección cerrada fue desarrollada por Umansky². Todas estas han sido resumidas en las teorías clásicas de vigas de pared delgada, tanto abiertas como cerradas, desarrolladas por Gjelsvik³. Sin embargo, puede resultar cuestionable su aplicabilidad para el caso de vigas compuestas. Esto es debido al comportamiento anisótropo y a la más alta flexibilidad al corte de estas últimas. Consecuentemente se han desarrollado una serie de modelos que consideran apropiadamente dichos efectos para estudios estáticos⁴⁻¹⁰ y dinámicos¹¹⁻¹⁶. De todas maneras está implícito en la cinemática de estos modelos que la distribución del alabeo torsional puede ser descripta mediante la función de Saint-Venant de la misma manera que en la teoría de Vlasov. Empero el comportamiento intrínsecamente acoplado entre los modos de deformación de torsión, flexión, extensión y corte, que acontece en las vigas laminadas por el efecto de la anisotropía, pone en duda la conveniencia de utilizar la función de alabeo de Saint-Venant para una apropiada descripción de su cinemática. Una forma alternativa de modelizar el alabeo fue desarrollada por Aleksandar Prokic^{17, 18}. La teoría de Prokic modeliza el alabeo de cualquier tipo de sección de viga de pared delgada a partir de los desplazamientos de puntos selectos de la sección llamados nodos e interpolando entre ellos al igual que en el método de elementos finitos. Trabajos similares en este aspecto han sido desarrollados por Krenk y Jeppesen¹⁹ y J. Jönson²⁰. De todas maneras, estas teorías se han aplicado únicamente al estudio estático de vigas isotropas.

En el presente trabajo se presenta un modelo generalizado para el análisis dinámico de vigas de pared delgada de sección arbitraria que hace uso de una función generalizada de alabeo (tanto flexional como torsional). El enfoque puede considerarse como una extensión de la Teoría de Prokic al caso de materiales compuestos y aplicada fundamentalmente a estudios dinámicos. Este modelo se implementa computacionalmente mediante el método de elementos finitos. El enfoque se utiliza para la determinación de frecuencias y modos naturales de vibración en algunos ejemplos concretos.

2 TEORÍA

2.1 Hipótesis:

Se considera una viga recta compuesta de pared delgada con sección transversal arbitraria tal como se muestra en la figura 1. Los puntos de dicho miembro estructural son referidos a un sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) , donde el eje z es paralelo al eje de la viga mientras que x e y son los ejes principales de inercia de la sección transversal. Un sistema auxiliar denominado (s, n) es usado dentro cada elemento de la sección formando un ángulo α con el sistema principal. Para el desarrollo de la formulación matemática, se adoptan las siguientes hipótesis:

- La sección es totalmente rígida en su plano.
- Los desplazamientos causados por alabeo varían linealmente entre cualquier par de nodos adyacentes de la sección, mientras que el alabeo relativo a la línea media de la sección transversal es adoptado tal como en la teoría clásica de vigas de pared delgada.
- Se consideran no nulas las componentes de las deformaciones ε_z , γ_{zs} y γ_{zn} mientras que no se tiene en cuenta la deformación ε_n a través del espesor de la sección.
- Las componentes σ_s y τ_{sn} se consideran nulas.

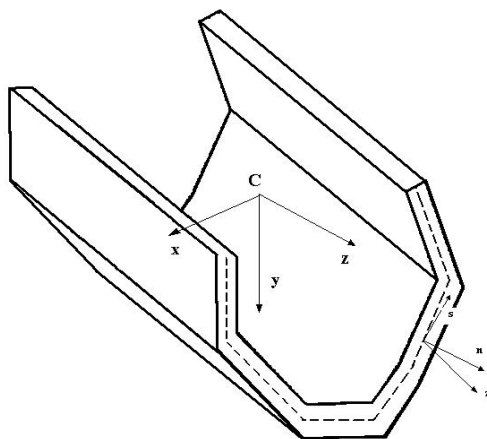


Figura 1: Sección genérica donde se muestran los sistemas de referencia en que se expresa la cinemática de la sección

2.2 Expresiones cinemáticas

Los desplazamientos de cada punto de la sección se expresan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u^* &= u(z) - y \cdot \vartheta(z), \quad v^* = v(z) + x \cdot \vartheta(z), \\ w^* &= y \cdot \psi_x(z) - x \cdot \psi_y(z) + w_{wfp} \end{aligned} \quad (1)$$

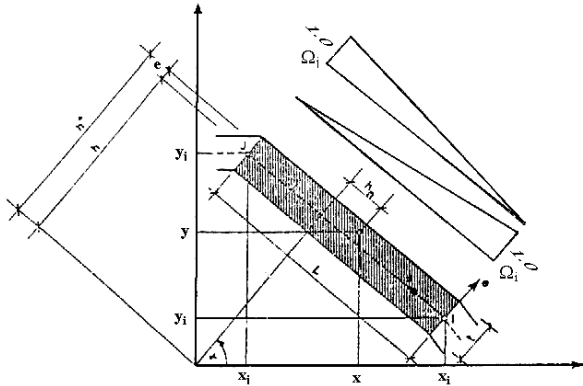


Figura 2: Funciones de forma seccionales

El desplazamiento axial (sin considerar el correspondiente a flexión) w_{wfp} queda expresado mediante:

$$w_{wfp} = w^s_{wfp} + w^e_{wfp} \quad (2)$$

donde:

$$w^s_{wfp} = \sum_i^n \Omega^i(x, y) \cdot w_i(z) \quad (3)$$

representa el alabeo de la línea media de la sección transversal. Las funciones Ω^i expresan el alabeo de la sección entre dos puntos nodales en forma lineal, y existen solo entre los puntos i donde toman valor 1 y los nodos adyacentes a ellos, donde toman el valor 0.

El segundo término del miembro derecho de la ecuación (2) está dado por:

$$w^e_{wfp} = -\omega(x, y) \cdot (\partial \vartheta / \partial z) \quad (4)$$

Esta expresión determina el alabeo relativo de cualquier punto de la sección respecto de la línea media de la sección transversal, de acuerdo con lo propuesto en la teoría clásica de vigas de pared delgada, donde:

$$\omega(x, y) = h_n \cdot n \quad (5)$$

El desplazamiento total fuera del plano puede escribirse entonces como:

$$w^* = y \cdot \psi_x - x \cdot \psi_y + \sum_i^n \Omega^i(x, y) \cdot w_i(z) - \omega(x, y) \cdot (\partial \mathcal{G} / \partial z) \quad (6)$$

Expresando los desplazamientos en el sistema local de cada segmento en que se ha dividido la sección, se tiene:

$$u_s = -u^* \text{sen} \alpha_i + v^* \text{cos} \alpha_i, \quad v_e = u^* \text{cos} \alpha_i + v^* \text{sen} \alpha_i \quad (7)$$

Las componentes no nulas de las deformaciones, teniendo en cuenta las hipótesis realizadas, están dadas por:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w^*}{\partial z}, \quad \gamma_{zs} = \frac{\partial u_s}{\partial z} + \frac{\partial w^*}{\partial s}, \quad \gamma_{zn} = \frac{\partial v_e}{\partial z} + \frac{\partial w^*}{\partial n} \quad (8)$$

Sustituyendo las (6) y (7) en las (8) obtenemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= y(s, n) \cdot \psi'_x - x(s, n) \cdot \psi'_y + \sum_i^n \Omega^i \cdot w'_i - \omega \cdot \mathcal{G}'' \\ \gamma_{zs} &= -u' \cdot \text{sen} \alpha_i + v' \cdot \text{cos} \alpha_i + (y \cdot \text{sen} \alpha_i + x \cdot \text{cos} \alpha_i - \partial \omega / \partial s) \mathcal{G}' + \\ &\quad + w_i d\Omega_i / ds - \psi_y \partial x / \partial s + \psi_x \partial y / \partial s \end{aligned} \quad (9)$$

$$\gamma_{zn} = u' \cdot \text{cos} \alpha_i + v' \cdot \text{sen} \alpha_i + (x \cdot \text{sen} \alpha_i - y \cdot \text{cos} \alpha_i - \partial \omega / \partial n) \mathcal{G}' - \psi_y \partial x / \partial n + \psi_x \partial y / \partial n$$

Donde:

$$\begin{aligned} x &= x_i - s \cdot \text{sen} \alpha_i + n \cdot \text{cos} \alpha_i \\ y &= y_i + s \cdot \text{cos} \alpha_i + n \cdot \text{sen} \alpha_i \\ h_n &= x \cdot \text{sen} \alpha_i - y \cdot \text{cos} \alpha_i \\ \Omega_i &= 1 - s/l; \Omega_j = s/l \end{aligned} \quad (10)$$

La modelización del alabeo descripta, puede considerarse como una formulación del tipo de elementos finitos, pero con carácter seccional.

2.3 Deducción de las ecuaciones del movimiento:

Las ecuaciones del movimiento se derivan a partir de la aplicación del principio variacional de los trabajos virtuales. Utilizando notación indicial para las tensiones, deformaciones y desplazamientos, puede expresarse como:

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_V \left(f_i - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) \delta u_i dV - \int_S \bar{f}_i \delta u_i dA = 0 \quad (11)$$

En estas ecuaciones, σ_{ij} son las tensiones asociadas con las componentes lineales de las deformaciones ε_{ij} . f_i son las fuerzas de volumen, ρ es la densidad del material (que caracteriza las fuerzas inerciales) y \bar{f}_i son las fuerzas sobre la superficie del cuerpo.

Substituyendo las expresiones correspondientes a los desplazamientos y las deformaciones en (11) e integrando en la sección, es posible obtener expresiones unidimensionales para los trabajos virtuales que gobiernan la dinámica del miembro estructural que estamos considerando. Operando de esta manera se obtiene:

$$L_K + L_M + L_P = 0 \quad (12)$$

En (12), L_K está dado por:

$$L_K = \int_0^L (M_x \delta \psi'_x - M_y \delta \psi'_y + Q_y \delta (v' + \psi_x) + Q_x \delta (u' - \psi_y) + (M_z - B_{\tau\omega}) \delta \vartheta' - B_{\omega} \delta \vartheta'' - \left(\sum_i^n (B_i - B_{\tau\Omega}) \right) \delta w_i) dz \quad (13)$$

Los esfuerzos incluidos en (13) están definidos por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} Q_x &= \iint \tau_{zx} dA, & Q_y &= \iint \tau_{zy} dA; \\ M_x &= - \iint y \sigma_z dA, & M_y &= \iint x \sigma_z dA, & M_z &= \iint (x \tau_{zy} - y \tau_{zx}) dA \\ B_i &= \iint \Omega^i \sigma_z dA \quad \text{con } i=1,2,\dots,n \\ B_{\omega} &= \int_A \sigma_z \omega dA, & B_{\tau\omega} &= \int_A \left(\tau'_{zx} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \tau'_{zy} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) dA \\ B_{\tau\Omega} &= \int_A \left(\tau_{zx} \frac{\partial \Omega_i}{\partial x} + \tau_{zy} \frac{\partial \Omega_i}{\partial y} \right) dA \quad \text{con } i=1,2,\dots,n \end{aligned} \quad (14)$$

Las expresiones anteriores representan los esfuerzos cortantes en las direcciones x e y , los momentos flectores respecto del eje x y del eje y , el momento torsor y cada uno de los esfuerzos generalizados actuantes sobre la sección debidos al desplazamiento axial de cada uno de los nodos de la sección. Particularmente, cada B_i se define por analogía con la

formulación de Vlasov como Bimomento generalizado.

Los términos inerciales incluidos en (12) están expresados en la forma:

$$\begin{aligned}
 L_M = \int^L \rho & \left[\left(A \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - S_y \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right) \delta u + \left(A \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - S_x \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right) \delta v + \right. \\
 & \left. + \left(-S_y \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + S_x \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (I_{xx} + I_{yy}) \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right) \delta \vartheta + \right. \\
 & \left. + \left(-\sum_i^n I_{\omega \Omega i} \frac{\partial^2 w_i}{\partial z^2} - I_{\omega y} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial z^2} + I_{\omega x} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial z^2} + I_{\omega \omega} \frac{\partial^2 \vartheta'}{\partial z^2} \right) \delta \vartheta' + \right. \\
 & \left. + \left(-\sum_i^n I_{x \Omega i} \frac{\partial^2 w_i}{\partial z^2} - I_{xy} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial z^2} + I_{xx} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial z^2} + I_{\omega x} \frac{\partial^2 \vartheta'}{\partial z^2} \right) \delta \psi_y + \right. \\
 & \left. + \left(-\sum_i^n I_{y \Omega i} \frac{\partial^2 w_i}{\partial z^2} - I_{yy} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial z^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial z^2} + I_{\omega y} \frac{\partial^2 \vartheta'}{\partial z^2} \right) \delta \psi_x + \right. \\
 & \left. + \sum_i^n \left(\sum_j^n I_{\Omega \Omega ij} \frac{\partial^2 w_i}{\partial z^2} + I_{y \Omega i} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial z^2} - I_{x \Omega i} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial z^2} - I_{\omega \Omega i} \frac{\partial^2 \vartheta'}{\partial z^2} \right) \delta w_i \right] dz
 \end{aligned} \tag{15}$$

Quedan definidas entonces, las siguientes características seccionales:

$$\begin{aligned}
 (A, S_x, S_y, S_\omega, S_{\Omega i}) &= \int_A (1, x, y, \omega, \Omega_i) dA \\
 (I_{xx}, I_{yy}, I_{xy}, I_{\omega x}, I_{\omega y}, I_{\omega \omega}) &= \int_A (xx, yy, xy, \omega x, \omega y, \omega \omega) dA \\
 (I_{x \Omega i}, I_{y \Omega i}, I_{\omega \Omega i}, I_{\Omega \Omega ij}) &= \int_A (x \Omega_i, y \Omega_i, \omega \Omega_i, \Omega_i \Omega_j) dA
 \end{aligned} \tag{16}$$

Por último, el trabajo virtual debido a las fuerzas exteriores (tanto de volumen, como las distribuidas sobre la superficie), está dado por:

$$\begin{aligned}
 L_P = \int^L & \left(q_x \delta u + q_y \delta v + m_z \delta \vartheta - m_y \delta \psi_y + m_x \delta \psi_x + \sum_i^n b_i \delta w_i \right) dz + \\
 & \left[\bar{T}_x \delta u + \bar{T}_y \delta v + \bar{M}_z \delta \vartheta - \bar{M}_y \delta \psi_y + \bar{M}_x \delta \psi_x + \sum_i^n \bar{B}_i \delta w_i \right]_{z=0}^{z=L}
 \end{aligned} \tag{17}$$

Las ecuaciones del movimiento pueden obtenerse a partir de las expresiones anteriores aplicando las reglas del cálculo variacional. De esta manera arribamos al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$-\frac{\partial Q_x}{\partial z} - \rho \left(A \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} - S_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2} \right) = q_x \quad (18 a)$$

$$-\frac{\partial Q_y}{\partial z} - \rho \left(A \frac{\partial^2 v}{\partial a^2} + S_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2} \right) = q_y \quad (18 b)$$

$$-\frac{\partial M_x}{\partial z} + Q_y + \rho \left(- \sum_{i=1}^n I_{y\alpha i} \frac{\partial^2 w_i}{\partial a^2} - I_{yy} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial a^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial a^2} + I_{y\omega} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial a^2} \right) = m_x \quad (18 c)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial z} - Q_x + \rho \left(\sum_{i=1}^n I_{x\alpha i} \frac{\partial^2 w_i}{\partial a^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial a^2} - I_{xx} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial a^2} - I_{x\omega} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial a^2} \right) = m_y \quad (18 d)$$

$$-\frac{\partial M_z}{\partial z} + \rho \left(S_y \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} - S_x \frac{\partial^2 v}{\partial a^2} - (I_{xx} + I_{yy}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2} \right) + \frac{\partial^2 B_\omega}{\partial z^2} - \frac{\partial B_{z\omega}}{\partial z} +$$

$$+ \rho \left(\sum_{i=1}^n I_{\omega\alpha i} \frac{\partial^2 w_i'}{\partial a^2} - I_{\omega y} \frac{\partial^2 \psi_x'}{\partial a^2} + I_{\omega x} \frac{\partial^2 \psi_y'}{\partial a^2} + I_{\omega\omega} \frac{\partial^2 \varphi''}{\partial a^2} \right) = m_z$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial z} + \frac{\partial B_{z\alpha}}{\partial z} +$$

$$+ \rho \left(- \sum_{j=1}^n I_{\alpha\alpha j} \frac{\partial^2 w_j}{\partial a^2} - I_{y\alpha} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial a^2} + I_{x\alpha} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial a^2} + I_{\alpha\alpha} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial a^2} \right) = b_i \text{ con } i=1,2,3,\dots,n$$

con las correspondientes condiciones de borde.

2.4 Ecuaciones constitutivas para las resultantes de tensión

Considerando que, en general, la dirección del eje de la viga no coincide con la dirección de las fibras en cada una de las capas que la integran, las ecuaciones constitutivas pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\sigma_z = \bar{Q}_{11} \varepsilon_z + \bar{Q}_{12} \varepsilon_s + \bar{Q}_{16} \gamma_{zs} \quad (19 a)$$

$$\sigma_s = \bar{Q}_{12} \varepsilon_z + \bar{Q}_{22} \varepsilon_s + \bar{Q}_{26} \gamma_{zs} \quad (19 \text{ b})$$

$$\tau_{zs} = \bar{Q}_{16} \varepsilon_z + \bar{Q}_{26} \varepsilon_s + \bar{Q}_{66} \gamma_{zs} \quad (19 \text{ c})$$

$$\tau_{zn} = \bar{Q}_{44} \gamma_{sn} + \bar{Q}_{45} \gamma_{zn} \quad (19 \text{ d})$$

$$\tau_{sn} = \bar{Q}_{45} \gamma_{zn} + \bar{Q}_{55} \gamma_{zn} \quad (19 \text{ e})$$

donde los \bar{Q}_{ij} se definen y calculan de acuerdo a Barbero²¹.

Tal como ha sido expresado en las hipótesis, las deformaciones ε_s pueden despejarse a partir de la (19 b) considerando que $\sigma_s = 0$. Sustituyendo el resultado obtenido a partir de esta última consideración en (19 a y c), se obtienen las siguientes expresiones para las tensiones σ_z y τ_{zs} :

$$\sigma_z = \bar{Q}'_{11} \varepsilon_z + \bar{Q}'_{16} \gamma_{zs} \quad (20 \text{ a})$$

$$\tau_{zs} = \bar{Q}'_{16} \varepsilon_z + \bar{Q}'_{66} \gamma_{zs} \quad (20 \text{ b})$$

Donde:

$$\bar{Q}'_{11} = \bar{Q}_{11} - \frac{(\bar{Q}_{12})^2}{\bar{Q}_{22}}; \quad \bar{Q}'_{16} = \bar{Q}_{16} - \frac{\bar{Q}_{12}\bar{Q}_{26}}{\bar{Q}_{22}}; \quad \bar{Q}'_{66} = \bar{Q}_{66} - \frac{(\bar{Q}_{26})^2}{\bar{Q}_{22}} \quad (21)$$

De manera análoga, despejando γ_{sn} de la ecuación (19 e) suponiendo que $\tau_{sn} = 0$, se llega a:

$$\tau_{zn} = \bar{Q}'_{55} \gamma_{zn} \quad (22)$$

donde:

$$\bar{Q}'_{55} = \bar{Q}_{55} - \frac{(\bar{Q}_{45})^2}{\bar{Q}_{44}} \quad (23)$$

Nótese que en las ecuaciones constitutivas (20) y (22), el efecto Poisson es tomado en cuenta implícitamente.

Teniendo en cuenta lo dicho hasta aquí, es posible reemplazar las expresiones para las deformaciones en función de los desplazamientos generalizados y sus derivadas (9), dentro de las relaciones constitutivas (20) y (22), y a su vez estas últimas en las expresiones (14) para obtener las resultantes de tensión en función de los desplazamientos generalizados. Esta última relación puede expresarse en forma matricial de la siguiente manera:

$$\{\mathbf{F}\} = [\mathbf{C}] \{\mathbf{u}\} \quad (24)$$

El vector $\{\mathbf{F}\}$, que reúne las resultantes de tensión tiene las siguientes componentes:

$$\{\mathbf{F}\}^T = \{Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_z, B_i, \dots, B_n, B_\omega, B_{\tau_{\alpha\beta}}, \dots, B_{\tau_{\alpha n}}, B_{\tau_{\omega}}\} \quad (25)$$

Por otra parte, el vector columna $\{\mathbf{u}\}$ está dado por:

$$\{\mathbf{u}\}^T = \left\{ \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \psi_x, \frac{\partial \psi_x}{\partial z}, \psi_y, \frac{\partial \psi_y}{\partial z}, w_i, \dots, w_n, \frac{\partial w_i}{\partial z}, \dots, \frac{\partial w_n}{\partial z} \right\} \quad (26)$$

Se han obtenido hasta aquí las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema. Empleando un enfoque mediante la aplicación de trabajos virtuales, se realiza la implementación mediante el método de Elementos Finitos.

3 IMPLEMENTACIÓN MEDIANTE MEF

En la figura 3 se muestra un elemento típico desarrollado en base a la formulación planteada, con 5 grados de libertad centroidales $(u, v, \varphi, \psi_x, \psi_y)$, y tantos grados de libertad nodales (w_i) como nodos se han utilizado para definir la forma de la sección transversal. De acuerdo al planteo cinemático realizado, se puede escribir los desplazamientos de la sección en las direcciones x, y, z de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} u^* \\ v^* \\ w^* \end{bmatrix} = [A] [q] \quad (27)$$

donde la matriz A está dada por:

$$A = \begin{bmatrix} N & 0 & -yN & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N & xN & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\omega N' & -xN & yN & \Omega^1 N_w & \dots & \Omega^i N_w & \dots & \Omega^n N_w \end{bmatrix} \quad (28)$$

Mientras que el vector q constituye el vector de desplazamientos nodales, que puede expresarse de la siguiente manera:

$$q = [q_u, q_v, q_\varphi, q_{\psi_x}, q_{\psi_y}, q_{w1}, \dots, q_{wi}, \dots, q_{wn}]^T \quad (29)$$

Donde:

$$q_u = [u_1, u_2, u_3]^T; \quad q_v = [v_1, v_2, v_3]^T; \quad q_\varphi = [\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3]^T; \quad (30 \text{ a-c})$$

$$\mathbf{q}_{\psi x} = [\psi_{x1}, \psi_{x2}, \psi_{x3}]^T; \quad \mathbf{q}_{\psi y} = [\psi_{y1}, \psi_{y2}, \psi_{y3}]^T; \quad (30 \text{ d-e})$$

$$\mathbf{q}_{wi} = [w_{i1}, w_{i2}]^T \text{ con } i = 1, 2, \dots, n \quad (30 \text{ f})$$

Puede observarse que se utilizan elementos de tres nodos para los desplazamientos centroidales y de dos nodos para los desplazamientos nodales (referidos a los nodos de la sección y no del elemento). De esta forma, para los cinco primeros grados de libertad (centroidales) se utilizan funciones de forma cuadráticas, mientras que para el alabeo de la sección se usan funciones lineales. Luego, las incógnitas en cada elemento longitudinal totalizan 3 por cada uno de los primeros grados de libertad, y dos en el caso de los grados de libertad que modelizan el alabeo. Por lo tanto, cada elemento tiene $(15 + 2n)$ grados de libertad, donde n corresponde al número de nodos que han sido utilizados para modelizar la sección.

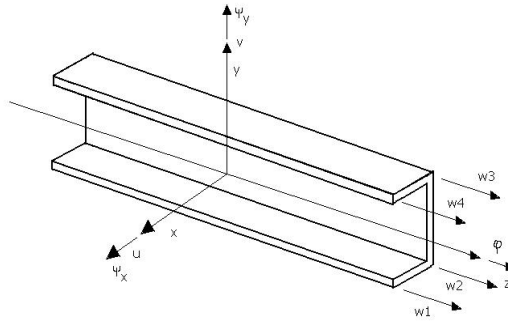


Figura 3: Grados de libertad considerados en cada nodo

Los vectores que contienen las funciones de forma, incluidos en la matriz \mathbf{A} son:

$$\mathbf{N} = [1 - 3\varepsilon + 2\varepsilon^2, 4\varepsilon(1 - \varepsilon), -\varepsilon(1 - 2\varepsilon)]; \quad (31 \text{ a})$$

$$\mathbf{N}' = [-3 + 4\varepsilon, 4 - 8\varepsilon, -1 + 4\varepsilon]; \quad (31 \text{ b})$$

$$\mathbf{N}_w = [1 - \varepsilon, \varepsilon]; \quad (31 \text{ c})$$

donde:

$$\varepsilon = \frac{z}{L}$$

siendo L la longitud del elemento.

Los desplazamientos en el sentido de la laminación para cada uno de los segmentos que componen la sección transversal (figura 4) pueden expresarse como:

$$\begin{bmatrix} u_{sk} \\ v_{ek} \\ w_k^* \end{bmatrix} = [G_k] \begin{bmatrix} u_k^* \\ v_k^* \\ w_k^* \end{bmatrix} \quad (32)$$

Donde el subíndice k indica cada elemento de la sección transversal, y por lo tanto se consideran solamente los desplazamientos q_{wi} correspondientes a cada uno de ellos. G_k es la matriz de transformación para cada elemento dada por:

$$G_k = \begin{bmatrix} -\text{sen}(\alpha_k) & \text{cos}(\alpha_k) & 0 \\ \text{cos}(\alpha_k) & \text{sen}(\alpha_k) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

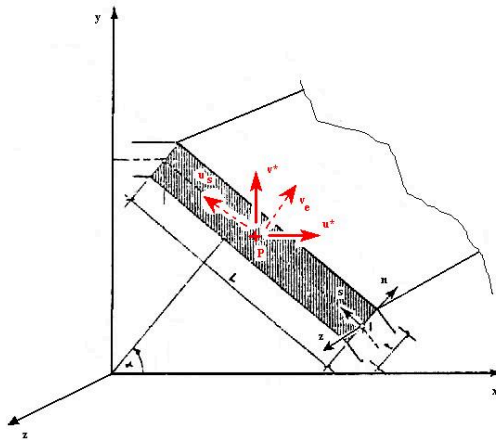


Figura 4: Desplazamientos de un punto cualquiera de la sección

Teniendo en cuenta las expresiones (32) y (33) podemos escribir, para cada elemento de la sección:

$$[A_{Lk}] = [G_k] [A_k] \quad (34)$$

Si expresamos las deformaciones como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k = [\varepsilon_z \quad \gamma_{zs} \quad \gamma_{zn}]^T. \quad (35)$$

y llamamos \mathbf{B}_{Lk} a:

$$\mathbf{B}_{Lk} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial s} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial n} \end{bmatrix} [\mathbf{A}_{Lk}] \quad (36)$$

las componentes lineales de las deformaciones quedan expresadas por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k = [\mathbf{B}_{Lk}] [\mathbf{q}_k] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial s} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial n} \end{bmatrix} [\mathbf{A}_{Lk}] [\mathbf{q}_k] \quad (37)$$

De acuerdo con las hipótesis realizadas para las ecuaciones constitutivas de materiales compuestos, podemos escribir la matriz \mathbf{D}_k de coeficientes elásticos para cada elemento como:

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11k} & Q'_{16k} & 0 \\ Q'_{16k} & Q'_{66k} & 0 \\ 0 & 0 & Q'_{55k} \end{bmatrix} \quad (38)$$

De esta manera podemos expresar las tensiones como:

$$\boldsymbol{\sigma}_k = [\mathbf{D}_k] [\boldsymbol{\varepsilon}_k] \quad (39)$$

donde:

$$\boldsymbol{\sigma}_k = [\sigma_z \quad \tau_{zs} \quad \tau_{zn}]^T \quad (40)$$

Podemos escribir la matriz $\boldsymbol{\sigma}_k$ de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\sigma}_k = [\mathbf{D}_k] [\mathbf{B}_{Lk}] [\mathbf{q}_k] \quad (41)$$

La energía para cada elemento de la sección puede escribirse como:

$$U_k = \frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{\sigma}_k^T \boldsymbol{\varepsilon}_k dV \quad (42)$$

De acuerdo con lo anterior y teniendo en cuenta la formulación básica de elementos finitos, las matrices de rigidez y masa de cada elemento seccional pueden expresarse respectivamente como:

$$\mathbf{K}_k = \iiint_V \mathbf{B}_{Lk}^T \mathbf{D}_k \mathbf{B}_{Lk} dV \quad (43 a)$$

$$\mathbf{M}_L = \rho \iiint_V \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k dV \quad (43 b)$$

Integrando en el volumen y ensamblando en la sección según la forma usual para elementos finitos, obtenemos las matrices \mathbf{K}_L y \mathbf{M}_L . Estas constituyen las matrices de rigidez lineal y de masa del elemento desarrollado.

Cada una de estas matrices queda compuesta por cuatro submatrices que nuclean los coeficientes de las incógnitas globales y nodales por un lado, y los acoplamientos entre ellos, de la siguiente manera.

$$\mathbf{K}_L = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_A] & [\mathbf{K}_C] \\ [\mathbf{K}_C^T] & [\mathbf{K}_B] \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M}_L = \begin{bmatrix} [\mathbf{M}_A] & [\mathbf{M}_C] \\ [\mathbf{M}_C^T] & [\mathbf{M}_B] \end{bmatrix} \quad (44)$$

Realizando el ensamblaje de las matrices \mathbf{M}_L y \mathbf{K}_L correspondientes a cada elemento longitudinal de la viga según las técnicas usuales de elementos finitos, obtenemos las matrices simétricas de masa y rigidez global \mathbf{M} y \mathbf{K} respectivamente.

Reemplazando las matrices obtenidas en el funcional energético dado por (12), nos queda:

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{Q}}{dt^2} + \mathbf{K} \mathbf{Q} = \mathbf{F} \quad (45)$$

Donde \mathbf{Q} corresponde al vector de desplazamientos globales del sistema que sale de ensamblar los \mathbf{q} de cada uno de los elementos, mientras que \mathbf{F} es el vector de cargas nodales equivalentes.

En el caso de vibraciones libres, en el que suponemos que no hay cargas que afecten al sistema, la ecuación matricial (42) se reduce a:

$$\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M} = 0 \quad (46)$$

donde los λ son los autovalores del sistema y corresponden a los cuadrados de las frecuencias circulares de vibración del sistema material. Haciendo $f = \sqrt{\lambda}/2\pi$ obtenemos las frecuencias de vibración del sistema en Hertz.

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Con el objeto de mostrar la flexibilidad del enfoque propuesto, se desarrollan dos ejemplos de cálculo de frecuencias naturales. El primero corresponde a un modelo de viga isótropa, pero de forma seccional compleja, en este caso de tipo multicelular. El segundo caso corresponde a una viga anisótropa, por lo que se emplea la formulación sin ningún tipo de simplificaciones. A efectos de validar los resultados obtenidos, se compara en el primer caso con valores determinados mediante el software comercial COSMOS/M, mientras que en el segundo caso se efectúa una comparación con los resultados al trabajo realizado por Cortínez y Piovan¹⁶.

4.1 Aplicación al caso isótropo:

Se estudia el comportamiento de una viga de sección cerrada con dos células como la que se muestra en la figura 5. Este tipo de sección es difícil de modelizar matemáticamente con los modelos basados en la teoría de Vlasov, mientras que de acuerdo con el enfoque planteado en este trabajo pueden fácilmente obtenerse las características seccionales para realizar el estudio dinámico. Se comparan las frecuencias con las obtenidas con un modelo desarrollado con el software COSMOS. Las características de la sección se muestran en la figura 5. La viga se encuentra empotrada en un extremo y libre en el otro. El material utilizado es aluminio.

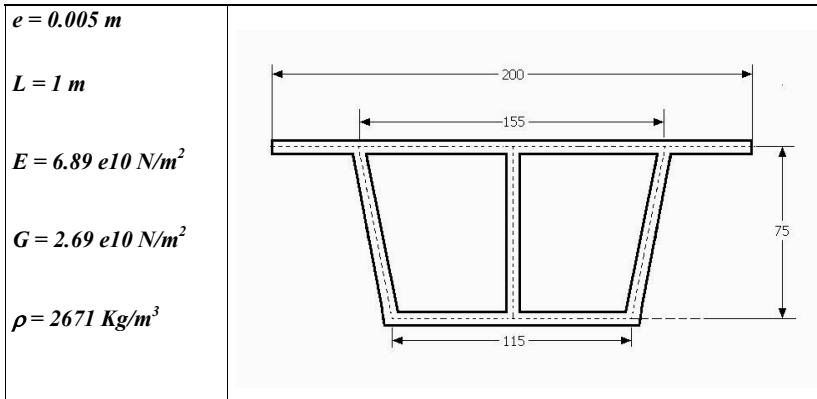


Figura 5: Forma de la sección

Los casos que se comparan son:

- I. Cosmos (elementos 3D)
- II. Presente enfoque – Sección discretizada con 8 puntos – 4 elementos.
- III. Presente enfoque – Sección Discretizada con 8 puntos – 8 elementos.
- IV. Presente enfoque – Sección Discretizada con 8 puntos – 16 elementos.

C.B.	Caso	f1	f2	f3	f4	f5
EL	I	87.05	146.21	498.75	535.73	748.86
	II	87.82	144.60	519.02	541.36	781.72
	III	87.48	144.28	504.94	538.70	768.16
	IV	87.44	144.21	502.73	537.72	765.04

Tabla 1: Comparación de resultados

4.2 Aplicación al caso anisótropo:

Se calculan frecuencias de vibración de vigas U simplemente apoyadas para varias laminaciones diferentes, comparándolas con los resultados obtenidos en [16]. La teoría desarrollada por Cortínez y Piovan constituye una teoría refinada aplicada vigas anisótropas de pared delgada, que incorpora efectos de flexibilidad por corte. Entre los casos considerados se encuentran frecuencias flexionales, torsionales y flexo-torsionales. Se consideran varios tipos de laminación diferente, de los tipos (0,0,0,0), (0,90,90,0) y (45,-45,-45,45). En los tres casos se trata de laminados simétricos y balanceados. El material analizado es Grafito/Epoxy (AS4/3501).

Los casos comparados para todas las secciones son:

- I. Modelo simplificado sin deformabilidad por corte (Gorbanphoor y Omidvar)
- II. Modelo considerando deformabilidad por corte (Cortínez y Piovan)
- III. Presente enfoque – Sección Discretizada con 3 puntos – 20 elementos
- IV. La figura 6 presenta las características de la sección estudiada.

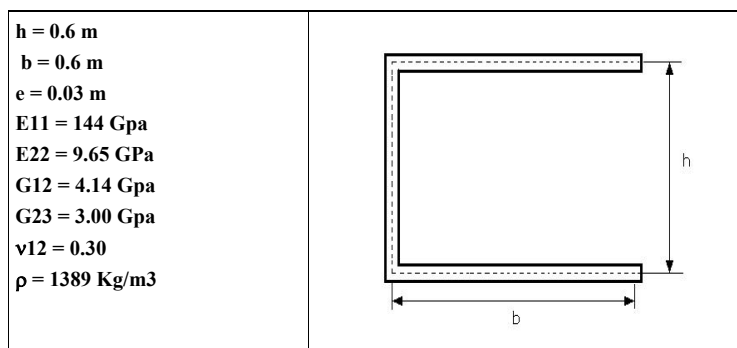


Figura 6: Forma de la sección

<i>Laminación</i>	<i>h / L</i>	<i>Caso</i>	<i>f1</i>	<i>f2</i>	<i>f3</i>	<i>f4</i>
{0/0/0/0}	0.05	I	9.82	38.63	52.07	86.64
		II	9.42	33.23	39.03	64.70
		III	9.62	34.79	39.73	69.74
{0/0/0/0}	0.10	I	38.63	153.86	207.98	345.90
		II	33.23	99.03	102.79	169.05
		III	34.27	106.14	106.17	186.78
{0/0/0/0}	0.15	I	86.64	345.90	467.84	777.95
		II	64.70	166.32	169.05	272.03
		III	67.75	172.72	184.45	305.11
{0/90/90/0}	0.05	I	7.30	28.35	38.09	63.41
		II	7.14	26.02	31.95	53.15
		III	7.30	27.13	32.08	56.63
{0/90/90/0}	0.10	I	28.35	112.50	151.95	252.76
		II	26.02	84.94	93.02	153.81
		III	26.58	88.95	93.86	165.23
{0/90/90/0}	0.15	I	63.41	252.76	341.73	568.31
		II	53.15	153.81	157.26	258.60
		III	54.61	158.96	162.90	281.08
{45/-45/-45/45}	0.05	I	5.34	15.53	18.45	31.32
		II	5.33	15.48	18.24	31.10
		III	4.72	14.33	15.92	33.30
{45/-45/-45/45}	0.10	I	15.53	53.14	68.77	115.26
		II	15.48	52.50	65.76	112.22
		III	13.51	51.51	60.50	110.93
{45/-45/-45/45}	0.15	I	31.32	115.26	152.67	254.84
		II	31.10	112.22	139.01	240.68
		III	28.85	106.25	122.50	217.76

Tabla 2: Frecuencias flexo-torsionales de vigas U laminadas (continuación)

<i>Laminación</i>	<i>H/L</i>	<i>Caso</i>	<i>f1</i>	<i>f2</i>	<i>F3</i>	<i>f4</i>
{0/0/0/0}	0.05	I	22.21	88.85	199.92	355.42
		II	20.38	67.17	122.06	178.01
		III	20.78	71.08	133.60	200.30
{0/0/0/0}	0.10	I	88.85	355.42	799.69	1421.67
		II	67.17	178.01	288.05	395.60
		III	70.82	197.00	327.22	457.45
{0/0/0/0}	0.15	I	199.92	799.69	1799.30	3198.75
		II	122.06	288.05	448.76	606.77
		III	132.61	324.75	515.27	704.54
{0/90/90/0}	0.05	I	16.22	64.89	146.00	259.56
		II	15.46	54.75	105.76	160.85
		III	15.55	55.88	109.84	170.12
{0/90/90/0}	0.10	I	64.89	259.56	584.01	1038.24
		II	54.75	160.85	272.53	382.40
		III	55.71	167.54	289.12	411.82
{0/90/90/0}	0.15	I	146.00	584.01	1314.02	2336.04
		II	105.76	272.53	436.60	597.08
		III	108.77	287.04	466.74	644.86

Tabla 3: Frecuencias flexionales de vigas U laminadas

5 CONCLUSIONES

Se ha presentado un nuevo modelo matemático de carácter muy general para el análisis estructural de cualquier tipo de estructura de pared delgada, basado en una extensión del modelo desarrollado por Aleksandar Prokic para vigas isótropas. El modelo permite el estudio de vigas de pared delgadas con las siguientes características:

- Desde el punto de vista geométrico: cualquier tipo de sección, abierta o cerrada, simétrica o asimétrica, con una o más células cerradas, o combinaciones de secciones.
- Desde el punto de vista del material: cualquier tipo de material, isótropo o anisótropo, o combinaciones de varios materiales y laminaciones.
- Desde el punto de vista del modelo propiamente dicho: permite la modelización de cualquier tipo de condición de vínculo y estado de cargas, incluyendo algunas muy complicadas de representar con los enfoques tradicionales.

Por otra parte, mediante el método de elementos finitos (MEF) se ha aplicado el presente modelo al tratamiento dinámico de vigas de diferentes secciones, constituidas tanto por

materiales isotropos como anisotropos.

En todos los casos pudo observarse la obtención de resultados coherentes con los existentes en la literatura y comparables con los obtenidos mediante modelos refinados que incorporan efectos de corte, verificando buena aproximación con resultados analíticos y computacionales para la obtención de frecuencias de vibración.

Es importante remarcar que, como ya se ha dicho, el enfoque utilizado en el presente trabajo no necesita de la adopción “a priori” de funciones que representen formas predeterminadas para el alabeo de la sección. La realización de suposiciones en este aspecto, condiciona los resultados finales dado que implica fijar de antemano la forma que adoptará la sección luego de la deformación, al menos cualitativamente, quedando libre solo el parámetro que magnifica el alabeo a lo largo de la viga. En el caso del enfoque planteado en este trabajo, los resultados surgen naturalmente a partir de la formulación para cualquier tipo de sección. Este tópico hace especialmente adecuado este modelo para el estudio estático y dinámico de vigas de pared delgada anisotropas.

6 AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo fue realizado gracias al apoyo de la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Tecnológica Nacional.

7 REFERENCIAS

- [1] V. Vlasov, *Thin Walled Elastic Beams*, Jerusalem: Israel Program for Scientific Translation, 1961.
- [2] A. A. Umansky, *Torsión y Flexión de vigas de pared delgadas en estructuras de aviación*. Oborongiz, Departamento Estatal de Publicaciones para la Industria de la Defensa, Moscú, 1939.
- [3] A. Gjelsvik, *The Theory of Thin Walled Bars*. John Wiley and Sons.
- [4] N. R. Bauld Jr. y L. S. Tzeng, *A Vlasov theory for fiber-reinforced beams with thin-walled open cross sections*. International Journal of Solids and Structures, Vol. 20, 3, 277-297, 1984.
- [5] A. Ghorbanpoor y B. Omidvar, *Simplified analysis of thin-walled composite members*. Journal of Structural Engineering, Vol. 122, 11, 1379-1383, 1996.
- [6] O. A. Bauchau, *A Beam Theory of Anisotropic Materials*. ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 52, 416-422, 1985.
- [7] A. D. Stemple y S. W. Lee, *Finite Element Model for Composite Beams with Arbitrary Cross-Sectional Warping*. AIAA Journal, Vol. 26, 12, 1512-1520, 1988.
- [8] R. Chandra, A. Stemple y I. Chopra, *Thin Walled Composite Beams under Bending, Torsional and Extensional Loads*. AIAA Journal, Vol. 27, 7, 619-626, 1990.
- [9] E. C. Smith y I. Chopra, *Formulation and Evaluation of an Analytical Model for Composite Box-Beams*. Journal of American Helicopter Society, Vol. 36, 3, 23-35, 1991.
- [10] C. Cesnik, V. Sutyryn y D. Hodges, *Refined Theory of Composite Beams: The role of*

- short-wavelength extrapolation*. International Journal of Solids Structures, Vol. 33, 10, 1387-1408, 1996.
- [11] O. Song y L. Librescu, *Free vibration of anisotropic composite thin-walled beams of closed cross-section contour*. Journal of Sound and Vibration, Vol.167, 1, 129-147, 1993.
- [12] X. X. Wu y C. T. Sun, *Vibration analysis of laminated composite thin-walled beams using finite elements*. AIAA Journal, Vol.29, 5, 736-742, 1990.
- [13] V. H. Cortínez, M. T. Piován, P. G. Girón y R. E. Rossi, *Vibraciones de vigas abiertas monosimétricas y anisótropas deformables por corte*. MECOM 99, Mendoza, Argentina, 1999.
- [15] M. T. Piován y V. H. Cortínez., *Estática y dinámica de vigas anisótropas de paredes delgadas deformables por corte*. MECOM 2001, Córdoba, Argentina, 2001.
- [16] V. H. Cortínez – M. T. Piován, *Vibration and Buckling of Composite Beams with shear deformability*. Journal of Sound and Vibration. En prensa, 2002.
- [17] A. Prokic, *New Warping Function for Thin – Walled Beams. I: Theory*. Journal of Structural Engineering, Vol. 122, Nro. 12, 1437-1442, 1996.
- [18] A. Prokic, *New Warping Function for Thin – Walled Beams. II: Finite Element Method and Applications*. Journal of Structural Engineering, Vol. 122, Nro. 12, 1443-1452, 1996.
- [19] S. Krenk y B. Jeppesen, *Finite element for beam cross – sections of moderate wall thickness*. Computers and Structures, Vol 32, 1035-1043, 1989.
- [20] J. Jönsson, *Determination of shear stresses, warping functions and section properties of thin – walled beams using finite elements*. Computers and Structures, Vol. 68, 393-410, 1998.
- [21] E. J. Barbero, 1999, Introduction to Composite Material Design. Taylor and Francis Inc.