

COMPORTAMIENTO VISCOELÁSTICO LINEAL DE VIGAS CURVAS ANISÓTROPAS DEFORMABLES POR CORTE

Marcelo T. Piovan* y Víctor H. Cortínez*

* Grupo Análisis de Sistemas Mecánicos
Universidad Tecnológica Nacional- FRBB,
11 de Abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina
e-mail: mpiovan@frbb.utn.edu.ar, web page: <http://www.frbb.utn.edu.ar>

Key words: viscoelasticidad, vigas curvas de paredes delgadas, materiales compuestos.

Resumen. *En este artículo se desarrolla una metodología para el análisis de las deformaciones progresivas en el tiempo para vigas curvas de paredes delgadas construidas con materiales compuestos. En este análisis dependiente del tiempo, se considera un régimen de viscoelasticidad lineal. El estudio se efectúa mediante el principio de correspondencia, definido en el dominio Laplace-Carson, donde se representan las expresiones micro y macromecánicas del comportamiento viscoelástico lineal del material, para obtener posteriormente las componentes del tensor de relajación aplicables a un modelo de vigas curvas compuestas desarrollado por los autores. Se resuelven problemas de vigas elásticamente acopladas, en el dominio Laplace-Carson con el método de elementos finitos, para luego retornar al dominio temporal recurriendo a la inversión numérica de la transformación de Laplace.*

1 INTRODUCCION

El empleo de materiales compuestos modernos, está ganando un espacio cada vez más amplio en aplicaciones de ingeniería aeroespacial, civil y mecánica. Los modelos matemáticos de vigas rectas y curvas de paredes delgadas ofrecen la posibilidad de analizar estructuras complejas con relativa facilidad y claridad conceptual. Muchas estructuras construidas con materiales compuestos, se diseñan para resistir diferentes condiciones a lo largo de su vida útil de servicio. Bajo estas circunstancias, la deformación inducida por efecto creep, eventualmente conduce a grandes desplazamientos que pueden provocar el colapso o la falla estructural. La viscoelasticidad lineal ofrece a los diseñadores la posibilidad de analizar el comportamiento de materiales que presentan tasas de deformación con el tiempo y con las cargas aplicadas. Algunos investigadores^[1-2] desarrollaron modelos microestructurales como forma de caracterizar un material viscoelástico genérico, los cuales muestran muy buena correspondencia con validaciones experimentales. Sin embargo se ha hecho público^[3] que existe una limitada información referida al efecto creep en flexión y torsión de elementos estructurales tales como las vigas rectas. Las investigaciones efectuadas en esta dirección se han encuadrado en problemas clásicos de flexión de vigas simples^[2-3]. Aparentemente, no existen estudios sobre la viscoelasticidad lineal de vigas curvas anisótropas con secciones de paredes delgadas.

En el presente trabajo, se desarrolla una metodología para el análisis del problema en cuestión empleando el principio de correspondencia en un modelo de vigas curvas anisótropas de los autores^[4]. En esta metodología se combinan el modelo de viga curva con la micro y macro mecánica de los materiales compuestos^[1-2] en rango lineal viscoelástico, adoptando el modelo tetraparamétrico de Maxwell-Voigt para la representación del creep de la matriz resinosa. El análisis se efectúa en el dominio de Carson mediante un esquema de elementos finitos desarrollado específicamente. Luego, la solución de elementos finitos se ajusta con un conjunto de funciones en el dominio de Carson y finalmente se utiliza un procedimiento de inversión numérica de la transformada de Laplace-Carson para obtener la descripción temporal del creep. Con esta metodología se efectúan estudios paramétricos con el fin de explorar la influencia del creep en diferentes configuraciones de laminación, formas seccionales, y en los movimientos acoplados del arco, fuera del plano y en el plano.

2 DESCRIPCION DEL MODELO MICROMECHANICO

El comportamiento viscoelástico de un material compuesto que tiene microestructura periódica fue evaluado analítica y experimentalmente por Barbero y Luciano^[1]. Dado que muchos tipos de fibras utilizadas como refuerzo en los materiales compuestos, no presentan efectos creep que puedan apreciarse, las mismas se pueden considerar elásticas. En tanto que el comportamiento viscoelástico de los materiales compuestos queda, bajo estas circunstancias, representado exclusivamente por el de la matriz.

En el desarrollo del modelo micromecánico de la referencia [1] se efectúan una serie de hipótesis que se pueden resumir en las siguientes:

- H.1.** La matriz del material compuesto es viscoelástica lineal y las fibras son elásticas
H.2. El comportamiento viscoelástico de la matriz se representa mediante un modelo Maxwell-Voigt^[5] de cuatro parámetros.
H.3. Los coeficientes de Poisson se consideran constantes para la matriz y las fibras.
H.4. Se supone que el material es transversalmente isótropo.

Las ecuaciones constitutivas para un material viscoelástico lineal, en ausencia de tensiones o deformaciones iniciales previas a la sollicitación, se pueden representar en el dominio temporal con las siguientes expresiones:

$$\varepsilon(t) = \mathcal{M}(t) \sigma \quad (1)$$

$$\sigma(t) = \mathcal{L}(t) \varepsilon \quad (2)$$

donde, $\mathcal{M}(t)$ y $\mathcal{L}(t)$ son funciones de “flexibilidad” y de “relajación”^[5], las cuales se obtienen a partir de ensayos de creep o bien de relajación. En efecto, un ensayo de efecto creep permite obtener la función $\mathcal{M}(t)$ para un nivel constante de tensión de manera que $\mathcal{M}(t)$ es independiente del nivel de tensión (lo cual es la condición para que un material se considere viscoelástico lineal). En cambio de un ensayo de relajación se obtiene la función $\mathcal{L}(t)$ para un nivel constante de deformación.

Ahora, recurriendo al Principio de Correspondencia (el cual consiste en establecer una analogía entre los módulos elásticos y de relajación viscoelástico de materiales heterogéneos con iguales propiedades de fase geométricas)^[5], se puede obtener una relación entre las funciones $\mathcal{M}(t)$ y $\mathcal{L}(t)$. La ley de transformación de una función temporal genérica, en el dominio Carson se escribe como sigue

$$\widehat{\mathcal{G}}(\widehat{s}) = \mathcal{O}_C [G(t)] = \widehat{s} \int_0^{\infty} e^{-\widehat{s}t} G(t) dt = \widehat{s} \widehat{G}(\widehat{s}) = \widehat{s} \mathcal{O}_L [G(t)] \quad (3)$$

siendo \widehat{s} la variable del dominio Laplace o bien del dominio Carson y $\widehat{G}(\widehat{s})$ la transformada de Laplace de la función $G(t)$ y siendo $\mathcal{O}_L [G(t)]$ y $\mathcal{O}_C [G(t)]$ los operadores de transformación al dominio Laplace y Carson, respectivamente. Nótese que la transformación al dominio Carson es ventajosa frente a la transformación al dominio de Laplace, ya que las constantes siguen permaneciendo constantes en el dominio Carson y no en el dominio Laplace.

Así pues, las expresiones (1) y (2) se pueden representar en el dominio de Carson como sigue:

$$\widehat{\varepsilon}(\widehat{s}) = \widehat{\mathcal{M}}(\widehat{s}) \widehat{\sigma}(\widehat{s}) \quad (4)$$

$$\widehat{\sigma}(\widehat{s}) = \widehat{\mathcal{L}}(\widehat{s}) \widehat{\varepsilon}(\widehat{s}) \quad (5)$$

a partir de (4) y (5) se puede arribar a:

$$\widehat{\mathcal{L}}(\widehat{s}) \widehat{\mathcal{M}}(\widehat{s}) = I \quad (6)$$

La (6) es una de las formas para obtener $\widehat{\mathcal{L}}(\widehat{s})$ en función de $\widehat{\mathcal{M}}(\widehat{s})$ o viceversa^[3].

La flexibilidad por creep de un modelo Kelvin o Maxwell-Voigt para la matriz del material compuesto puede representarse según la siguiente expresión:

$$\mathcal{M}(t) = \frac{1}{E^e} + \frac{t}{\mu^M} + \frac{1}{E^V} \left(1 - \text{Exp} \left[-\frac{tE^V}{\mu^V} \right] \right) \quad (7)$$

En (7), E^e y E^V los módulos de elasticidad que describen el creep primario y $1/\mu^M$ es la pendiente del creep secundario, tal como se puede observar en la Figura 1. Aplicando a (7), el Principio de Correspondencia en el dominio de Carson, y teniendo en cuenta la relación (6) entre los tensores de relajación y de flexibilidad, se puede obtener la expresión (8) del módulo efectivo de relajación en el dominio Carson.

$$\widehat{E}_o = \widehat{\mathcal{L}}(\widehat{s}) = \frac{1}{\widehat{\mathcal{M}}(\widehat{s})} = \frac{E^e \eta^M (E^V + \eta^V s)}{E^e E^V + (E^V \eta^M + E^e (\eta^V + \eta^M))s + \eta^V \eta^V s^2} \quad (8)$$

La expresión (8) refleja muy buena concordancia con resultados experimentales en vista de los estudios efectuados por Luciano y Barbero [1, 6].

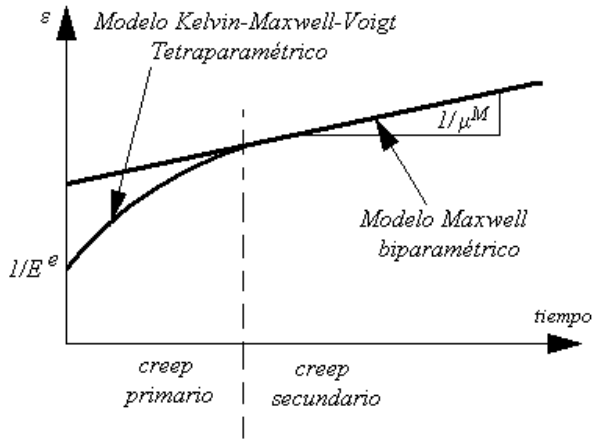


Figura 1. Representación de los patrones de creep de los modelos

Las expresiones de las constantes de Lamè en función de \widehat{E}_o para la matriz y las constantes de Lamè para las fibras elásticas (se suponen constantes a lo largo del tiempo) vienen dadas por (9) y (10) respectivamente

$$\hat{\lambda}_o = \frac{\hat{E}_o \nu_o}{(1+\nu_o)(1-2\nu_o)}, \quad \hat{\mu}_o = \frac{\hat{E}_o}{2(1+\nu_o)} \quad (9)$$

$$\lambda_l = \frac{E_l \nu_l}{(1+\nu_l)(1-2\nu_l)}, \quad \mu_l = \frac{E_l}{2(1+\nu_l)} \quad (10)$$

En (9) y (10) ν_o , ν_l y E_l son el coeficiente de Poisson de la matriz, el coeficiente de Poisson de las fibras y el modulo de elasticidad de las fibras, respectivamente. Los cuales, en virtud de las hipótesis **H.1** y **H.3** se consideran constantes.

Mediante la utilización de series de Fourier se puede obtener el comportamiento mecánico de un material compuesto con microestructura periódica. Diferentes procedimientos como los de Iwakuma y Nemat-Naser [3] desarrollados para considerar inclusiones conducen a la Metodología de Luciano y Barbero [7]. Esta última permite hallar los coeficientes rigidez y los módulos de elasticidad para materiales compuestos unidireccionales con fibras distribuidas en forma periódica y aleatoria. Posteriormente, recurriendo al Principio de Correspondencia, Luciano y Barbero [6] obtuvieron los tensores de relajación viscoelásticos para materiales compuestos con inclusiones periódicas. Bajo estas circunstancias si la estructura de un material compuesto es regular y periódica, es decir una matriz de resina reforzada con fibras cilíndricas de gran longitud, el tensor de relajación viscoelástico lineal de un sólido con fibras orientadas en la dirección principal, en el dominio de Carson, viene dado por las siguientes expresiones:

$$\hat{\mathcal{L}}_{11}(s) = \hat{\lambda}_o + 2\hat{\mu}_o \frac{\mathbf{V}_f}{\hat{H}} \left[\frac{S_3^2}{\hat{\mu}_o^2} - \frac{2S_3S_6}{\hat{\mu}_o^2 \tilde{g}} - \frac{\tilde{a}S_3}{\hat{\mu}_o \tilde{c}} + \frac{S_6^2 - S_7^2}{\hat{\mu}_o^2 \tilde{g}^2} + \frac{\tilde{a}S_6 + \tilde{b}S_7}{\hat{\mu}_o \tilde{g} \tilde{c}} + \frac{\tilde{a}^2 - \tilde{b}^2}{4\tilde{c}^2} \right] \quad (11)$$

$$\hat{\mathcal{L}}_{12}(s) = \hat{\lambda}_o + \frac{\mathbf{V}_f \tilde{b}}{\hat{H}} \left[\frac{S_3}{2\hat{\mu}_o \tilde{c}} - \frac{S_6 - S_7}{2\hat{\mu}_o \tilde{g} \tilde{c}} - \frac{\tilde{a} + \tilde{b}}{4\tilde{c}^2} \right] \quad (12)$$

$$\hat{\mathcal{L}}_{23}(s) = \hat{\lambda}_o + \frac{\mathbf{V}_f}{\hat{H}} \left[\frac{\tilde{a}S_7}{2\hat{\mu}_o \tilde{g} \tilde{c}} - \frac{\tilde{b}\tilde{a} + \tilde{b}^2}{4\tilde{c}^2} \right] \quad (13)$$

$$\hat{\mathcal{L}}_{22}(s) = \hat{\lambda}_o + 2\hat{\mu}_o \frac{\mathbf{V}_f}{\hat{H}} \left[-\frac{\tilde{a}S_3}{2\hat{\mu}_o \tilde{c}} + \frac{\tilde{a}S_6}{2\hat{\mu}_o \tilde{g} \tilde{c}} + \frac{\tilde{a}^2 - \tilde{b}^2}{4\tilde{c}^2} \right] \quad (14)$$

$$\hat{\mathcal{L}}_{44}(s) = \hat{\mu}_o - \mathbf{V}_f \left[-\frac{2S_3}{\hat{\mu}_o} + (\hat{\mu}_o - \mu_l)^{-1} + \frac{4S_7}{\hat{\mu}_o \tilde{g}} \right]^{-1} \quad (15)$$

$$\hat{\mathcal{L}}_{66}(s) = \hat{\mu}_o - \mathbf{V}_f \left[-\frac{S_3}{\hat{\mu}_o} + (\hat{\mu}_o - \mu_l)^{-1} \right]^{-1} \quad (16)$$

En las expresiones anteriores V_f es la proporción volumétrica de fibras en el material compuesto, los coeficientes \tilde{a} , \tilde{b} , \tilde{c} , \tilde{g} y \tilde{H} dados por las expresiones (17) a (20) y S_3 , S_6 y S_7 son formas parabólicas obtenidas mediante mínimos cuadrados [7] en función de la proporción volumétrica de fibras, las cuales se pueden ajustar según (21).

$$\tilde{a} = \mu_1 - \tilde{\mu}_o - 2\mu_1\nu_o + 2\tilde{\mu}_o\nu_1, \quad (17)$$

$$\tilde{b} = \mu_1\nu_1 - \tilde{\mu}_o\nu_o - 2\mu_1\nu_o\nu_1 + 2\tilde{\mu}_o\nu_1\nu_o \quad (18)$$

$$c = (\tilde{\mu}_o - \mu_1)(a+b), \quad \tilde{g} = 2(1-\nu_o) \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H} = & \frac{aS_3^2}{2\tilde{\mu}_o^2c} - \frac{aS_6S_3}{\tilde{\mu}_o^2cg} + \frac{2(S_6^2 - S_7^2)}{2\tilde{\mu}_o^2g^2c} + \frac{S_3(b^2 - a^2)}{2c^2\tilde{\mu}_o} + \\ & + \frac{S_6(a^2 - b^2) + S_7(ab + b^2)}{2c^2\tilde{\mu}_og} + \frac{a^3 - 2b^3 - 3ab^2}{8c^2} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} S_3 = & 0.49247 - 0.47603V_f - 0.02748V_f^2 \\ S_6 = & 0.36844 - 0.14944V_f - 0.27152V_f^2 \\ S_7 = & 0.12346 - 0.32035V_f + 0.23517V_f^2 \end{aligned} \quad (21)$$

Así pues se pueden obtener los coeficientes del tensor de relajación para un material transversalmente isótropo [7] en función de los coeficientes del tensor de relajación de un material compuesto unidireccional:

$$\begin{aligned} \hat{C}_{11} &= \hat{\mathcal{L}}_{11}, \quad \hat{C}_{12} = \hat{\mathcal{L}}_{12}, \quad \hat{C}_{66} = \hat{\mathcal{L}}_{66}, \\ \hat{C}_{22} &= \frac{3}{4}\hat{\mathcal{L}}_{22} + \frac{1}{4}\hat{\mathcal{L}}_{23} + \frac{1}{2}\hat{\mathcal{L}}_{44} \\ \hat{C}_{23} &= \frac{1}{4}\hat{\mathcal{L}}_{22} + \frac{3}{4}\hat{\mathcal{L}}_{23} - \frac{1}{2}\hat{\mathcal{L}}_{44} \\ \hat{C}_{44} &= \frac{1}{4}\hat{\mathcal{L}}_{22} - \frac{1}{4}\hat{\mathcal{L}}_{23} + \frac{1}{2}\hat{\mathcal{L}}_{44} \end{aligned} \quad (22)$$

De forma tal que tomando en cuenta la hipótesis de estado plano de tensiones, se puede obtener la expresión de las relaciones constitutivas para una lámina según:

$$\begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_{11} \\ \hat{\sigma}_{22} \\ \hat{\sigma}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Q}_{11}^* & \hat{Q}_{12}^* & 0 \\ \hat{Q}_{12}^* & \hat{Q}_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & \hat{Q}_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_{11} \\ \hat{\varepsilon}_{22} \\ \hat{\gamma}_{12} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

donde se han definido:

$$\hat{Q}_{11}^* = \hat{C}_{11} - \frac{\hat{C}_{12}^2}{\hat{C}_{22}}, \quad \hat{Q}_{12}^* = \hat{C}_{12} - \frac{\hat{C}_{12}\hat{C}_{23}}{\hat{C}_{22}}, \quad \hat{Q}_{22}^* = \hat{C}_{22} - \frac{\hat{C}_{23}^2}{\hat{C}_{22}}, \quad \hat{Q}_{66}^* = \hat{C}_{66} \quad (24)$$

3 DESCRIPCION DEL MODELO MACROMECHANICO

A continuación se desarrollan las expresiones constitutivas generales para relacionar los esfuerzos generalizados y las deformaciones generalizadas de viga curva, en el dominio de Carson.

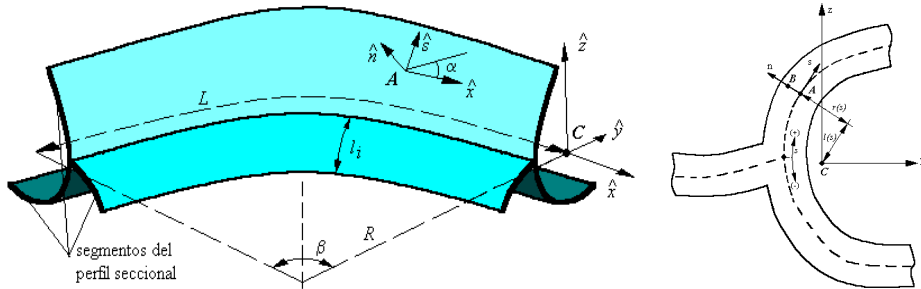


Figura 2. Descripción del modelo estructural de viga cura y su sección

Las deformaciones de placa del modelo de vigas curvas anisótropas [4] que se muestra en la Figura 2, se pueden representar en el dominio de Carson de acuerdo a la siguientes expresiones

$$\hat{\epsilon}_{xx} = [\hat{\epsilon}_{D1} - Y(s)\hat{\epsilon}_{D3} - Z(s)\hat{\epsilon}_{D2} - \hat{\omega}_p(s, \bar{s})\hat{\epsilon}_{D4}] \quad (25)$$

$$\hat{\kappa}_{xx} = \left[\frac{dZ}{ds}\hat{\epsilon}_{D3} - \frac{dY}{ds}\hat{\epsilon}_{D2} - l(s)\hat{\epsilon}_{D4} \right] \quad (26)$$

$$\hat{\gamma}_{xs} = \left[\frac{dY}{ds}\hat{\epsilon}_{D5} + \frac{dZ}{ds}\hat{\epsilon}_{D6} + [r(s) + \hat{\psi}(s, \bar{s})]\hat{\epsilon}_{D7} + \hat{\psi}(s, \bar{s})\hat{\epsilon}_{D4} \right] \quad (27)$$

$$\hat{\kappa}_{xs} = [-2\hat{\epsilon}_{D8} + \hat{\epsilon}_{D7}] \quad (28)$$

Las deformaciones generalizadas $\hat{\epsilon}_{D1}$, $\hat{\epsilon}_{D2}$, $\hat{\epsilon}_{D3}$, $\hat{\epsilon}_{D4}$, $\hat{\epsilon}_{D5}$, $\hat{\epsilon}_{D6}$, $\hat{\epsilon}_{D7}$ y $\hat{\epsilon}_{D8}$ vienen descriptas en función de los desplazamientos en el dominio de Carson según las siguientes expresiones [4]:

$$\hat{\epsilon}_{D1} = \left(\frac{\partial \hat{u}_{xc}}{\partial x} + \frac{\hat{u}_{yc}}{R} \right), \quad \hat{\epsilon}_{D2} = \left(\frac{\partial \hat{\theta}_y}{\partial x} + \frac{\hat{\phi}_x}{R} \right), \quad \hat{\epsilon}_{D3} = \left(\frac{\partial \hat{\theta}_z}{\partial x} - \frac{l}{R} \frac{\partial \hat{u}_{xc}}{\partial x} \right), \quad \hat{\epsilon}_{D4} = \left(\frac{\partial \hat{\theta}_x}{\partial x} - \frac{l}{R} \frac{\partial \hat{\theta}_y}{\partial x} \right) \quad (29)$$

$$\hat{\varepsilon}_{D5} = \left(\frac{\partial \hat{u}_{yc}}{\partial x} - \hat{\theta}_z \right), \hat{\varepsilon}_{D6} = \left(\frac{\partial \hat{u}_{zc}}{\partial x} - \hat{\theta}_y \right), \hat{\varepsilon}_{D7} = \left(\frac{\partial \hat{\phi}_x}{\partial x} - \hat{\theta}_x \right), \hat{\varepsilon}_{D8} = \left(\frac{\partial \hat{\phi}_x}{\partial x} - \frac{\hat{\theta}_y}{R} \right) \quad (30)$$

En las expresiones (29)-(30) u_{xc} es el desplazamiento axial, θ_z y θ_y son parámetros de rotación flexionales (los cuales, en el caso de una viga recta coinciden con las rotaciones flexionales), u_{yc} y u_{zc} son los desplazamientos transversales de la sección, ϕ_x es la rotación torsional de la sección y θ_x es una medida de la intensidad de alabeo. En las expresiones (25) a (28) las cantidades $Y(s)$, $Z(s)$, $r(s)$ y $l(s)$ son parámetros seccionales (ver Figura 2) no dependientes del tiempo, en consecuencia no se transforman. Las funciones $r(s)$ y $l(s)$ se definen [4] como sigue:

$$r(s) = Z(s) \frac{dY}{ds} - Y(s) \frac{dZ}{ds}, \quad l(s) = Y(s) \frac{dY}{ds} + Z(s) \frac{dZ}{ds} \quad (31)$$

En tanto que las funciones $\hat{\omega}_p(s, \hat{s})$ y $\hat{\psi}(s, \hat{s})$ se definen de la siguiente manera:

$$\hat{\omega}_p(s, \hat{s}) = \int_{\hat{s}} [r(s) - \hat{\psi}(s, \hat{s})] ds - \frac{\int_{\hat{s}} [r(s) - \hat{\psi}(s, \hat{s})] \hat{A}_{11}(s) ds}{\int_{\hat{s}} \hat{A}_{11}(s) ds} \quad (32)$$

$$\hat{\psi}(s, \hat{s}) = \frac{l}{\hat{A}_{66}(s)} \left[\frac{\int_{\hat{s}} r(s) ds}{\int_{\hat{s}} \frac{1}{\hat{A}_{66}(s)} ds} \right] \quad (33)$$

Téngase presente las variables s y \hat{s} son inherentemente distintas, ya que la primera corresponde a la coordenada en la dirección perimetral en la línea media de la pared seccional, en tanto que la segunda es la variable del dominio de Carson. Las ecuaciones constitutivas de los esfuerzos en términos de las deformaciones vienen dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \hat{Q}_X \\ \hat{M}_Y \\ \hat{M}_Z \\ \hat{B} \\ \hat{Q}_Y \\ \hat{Q}_Z \\ \hat{T}_W \\ \hat{T}_{sv} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{J}_{11} & \hat{J}_{12} & \hat{J}_{13} & \hat{J}_{14} & \hat{J}_{15} & \hat{J}_{16} & \hat{J}_{16} & \hat{J}_{16} & \hat{J}_{16} \\ & \hat{J}_{22} & \hat{J}_{23} & \hat{J}_{24} & \hat{J}_{25} & \hat{J}_{26} & \hat{J}_{26} & \hat{J}_{26} & \hat{J}_{26} \\ & & \hat{J}_{33} & \hat{J}_{34} & \hat{J}_{35} & \hat{J}_{36} & \hat{J}_{36} & \hat{J}_{36} & \hat{J}_{36} \\ & & & \hat{J}_{44} & \hat{J}_{45} & \hat{J}_{46} & \hat{J}_{46} & \hat{J}_{46} & \hat{J}_{46} \\ & & & & \hat{J}_{55} & \hat{J}_{56} & \hat{J}_{56} & \hat{J}_{56} & \hat{J}_{56} \\ & & & & & \hat{J}_{66} & \hat{J}_{66} & \hat{J}_{66} & \hat{J}_{66} \\ & & & & & & \hat{J}_{67} & \hat{J}_{68} & \hat{J}_{68} \\ & & & & & & \hat{J}_{77} & \hat{J}_{78} & \hat{J}_{78} \\ & & & & & & & \hat{J}_{88} & \hat{J}_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_{D1} \\ -\hat{\varepsilon}_{D2} \\ -\hat{\varepsilon}_{D3} \\ -\hat{\varepsilon}_{D4} \\ \hat{\varepsilon}_{D5} \\ \hat{\varepsilon}_{D6} \\ \hat{\varepsilon}_{D7} \\ \hat{\varepsilon}_{D8} \end{Bmatrix} \quad (34)$$

siendo \widehat{Q}_X , \widehat{M}_Y , \widehat{M}_Z , \widehat{B} , \widehat{Q}_Y , \widehat{Q}_Z , \widehat{T}_W y \widehat{T}_{SV} los esfuerzos generalizados transformados al dominio Carson. \widehat{Q}_X es el esfuerzo normal; \widehat{M}_Y y \widehat{M}_Z son momentos flectores; \widehat{B} es el bimomento; \widehat{Q}_Y y \widehat{Q}_Z son los esfuerzos de corte; \widehat{T}_W es el momento flexotorsor y \widehat{T}_{SV} es el momento torsor de Saint Venant. La matriz de la expresión (34) debe interpretarse como la matriz de los coeficientes de relajación de la viga. Los elementos \widehat{J}_{ij}^{hk} se obtienen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \widehat{J}_{ij}^{kh} = & \int \widehat{A}_{kh} \left(\widehat{g}_i^{(b)} \widehat{g}_j^{(b)} \right) ds + \int \widehat{B}_{kh} \left(\widehat{g}_i^{(b)} \widehat{g}_j^{(d)} + \widehat{g}_i^{(d)} \widehat{g}_j^{(b)} \right) ds + \\ & + \int \widehat{A}_{55}^{(H)} \left(\widehat{g}_i^{(c)} \widehat{g}_j^{(c)} \right) ds + \int \widehat{D}_{kh} \left(\widehat{g}_i^{(d)} \widehat{g}_j^{(d)} \right) ds \end{aligned} \quad (35)$$

para $\{i, j\} = \{1, \dots, 8\}$ y $\{h, k\} = \{1, 6\}$ y con los vectores:

$$\widehat{g}^{(b)} = \left\{ I, Z(s), Y(s), \widehat{\omega}_p(s, \widehat{s}), \frac{dY}{ds}, \frac{dZ}{ds}, r(s) - \widehat{\psi}(s, \widehat{s}), \widehat{\psi}(s, \widehat{s}) \right\} \quad (36)$$

$$\widehat{g}^{(c)} = \left\{ 0, 0, 0, 0, \frac{dZ}{ds}, -\frac{dY}{ds}, -I(s), 0 \right\}, \quad \widehat{g}^{(d)} = \left\{ 0, \frac{dY}{ds}, -\frac{dZ}{ds}, I(s), 0, 0, I, -2 \right\} \quad (37)$$

Las ecuaciones de equilibrio estáticas para una viga curva se adoptan de un trabajo previo de los autores [4], las cuales descriptas en el dominio de Carson, se escriben a continuación:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[\widehat{Q}_X + \frac{\widehat{M}_Z}{R} \right] - \widehat{\mathcal{Q}}_1(x, \widehat{s}) = 0, \quad -\frac{\partial \widehat{Q}_Y}{\partial x} + \frac{\widehat{Q}_X}{R} - \widehat{\mathcal{Q}}_2(x, \widehat{s}) = 0, \quad \frac{\partial \widehat{M}_Z}{\partial x} - \widehat{Q}_Y - \widehat{\mathcal{Q}}_3(x, \widehat{s}) = 0 \quad (38)$$

$$-\frac{\partial \widehat{Q}_Z}{\partial x} - \widehat{\mathcal{Q}}_4(x, \widehat{s}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[\widehat{M}_Y - \frac{\widehat{B}}{R} \right] - \widehat{Q}_Z - \frac{\widehat{T}_{SV}}{R} - \widehat{\mathcal{Q}}_5(x, \widehat{s}) = 0 \quad (39)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[\widehat{T}_{SV} + \widehat{T}_W \right] - \frac{\widehat{M}_Y}{R} - \widehat{\mathcal{Q}}_6(x, \widehat{s}) = 0, \quad \frac{\partial \widehat{B}}{\partial x} - \widehat{T}_W - \widehat{\mathcal{Q}}_7(x, \widehat{s}) = 0 \quad (40)$$

Las cuales están sujetas a las condiciones de borde apropiadas [4], transformadas al dominio de Carson. Consecuentemente, una vez establecidas las condiciones de borde, se pueden emplear las formas de solución convencionales del problema estático, en el dominio de Carson, utilizando las expresiones (35). Finalmente, para obtener la respuesta temporal al problema de viscoelasticidad lineal, se debe efectuar la transformación inversa de Laplace de las soluciones obtenidas en el dominio Carson, empleando las siguientes formas:

$$G(t) = \mathcal{O}_L^{-1} [\widehat{G}(\widehat{s})] = \mathcal{O}_L^{-1} \left[\frac{\widehat{G}(\widehat{s})}{\widehat{s}} \right] \quad (41)$$

En la expresión (41), $\mathcal{O}_L^{-1}[\bullet]$ es el operador de transformación inversa de Laplace, mientras que $\widehat{G}(\bar{s})$ y $\widehat{\mathcal{G}}(\bar{s})$ son las funciones en los dominios de Laplace y Carson respectivamente. La transformación inversa (41) se puede operar en forma simbólica o en forma numérica. El primer caso es posible solamente para un grupo muy limitado de configuraciones, específicamente, con material ortótropo y/o compuesto de laminación simétrica balanceada. En cambio el segundo caso es más versátil y permite mayor generalidad.

Aun cuando, la resolución de las ecuaciones diferenciales del problema en el dominio de Carson es plenamente viable, la misma está restringida a los casos mencionados en el párrafo anterior, razón por la cual se recurre a elaborar un esquema de cálculo, basado en el método de elementos finitos, con el objetivo de abarcar problemas más generales en régimen de viscoelasticidad lineal. Para ello, se emplea un elemento de tipo isoparamétrico de cuatro nodos, denominado ISOP4N, que permite representar la mecánica de los movimientos característicos de una viga curva.

En la Figura 3 se puede observar el elemento finito con los desplazamientos genéricos. La forma de interpolación de un desplazamiento generalizado $U_i(x)$ vendrá dada por la siguiente expresión genérica [9]:

$$U_i(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{N_N} \mathbf{f}_j(\bar{x}) U_i^{(j)} \quad \text{con } i=1, \dots, 7 \quad \text{con } \bar{x} \in [0, 1] \quad (42)$$

N_N es el número de nodos del elemento, \bar{x} es la coordenada intrínseca del elemento y $\mathbf{f}_j(\bar{x})$ son las funciones de forma del elemento definidas según las expresiones siguientes:

$$\mathbf{f}_1(\bar{x}) = 1 - \frac{11}{2}\bar{x} + 9\bar{x}^2 - \frac{9}{2}\bar{x}^3, \quad \mathbf{f}_2(\bar{x}) = 9\bar{x} - \frac{45}{2}\bar{x}^2 + \frac{27}{2}\bar{x}^3 \quad (43)$$

$$\mathbf{f}_3(\bar{x}) = -\frac{9}{2}\bar{x} + 18\bar{x}^2 - \frac{27}{2}\bar{x}^3, \quad \mathbf{f}_4(\bar{x}) = \bar{x} - \frac{9}{2}\bar{x}^2 + \frac{9}{2}\bar{x}^3 \quad (44)$$

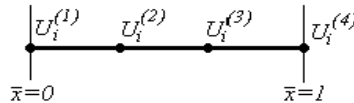


Figura 3. Descripción geométrica del elemento

El vector de desplazamientos nodales de (42) viene descrito de la siguiente manera:

$$\{\mathbf{U}\} = \left\{ \left\{ \mathbf{U}^{(1)} \right\}, \left\{ \mathbf{U}^{(2)} \right\}, \left\{ \mathbf{U}^{(3)} \right\}, \left\{ \mathbf{U}^{(4)} \right\} \right\} \quad (45)$$

con

$$\left\{ \mathbf{U}_{(j)}^{(i)} \right\} = \left\{ U_1^{(i)}, U_2^{(i)}, U_3^{(i)}, U_4^{(i)}, U_5^{(i)}, U_6^{(i)}, U_7^{(i)} \right\}^T = \left\{ u_{x_j}, u_{y_j}, \theta_{z_j}, u_{z_j}, \theta_{y_j}, \phi_{x_j}, \theta_{x_j} \right\}^T \quad (46)$$

Siguiendo las técnicas convencionales del método de elementos finitos [9], pero

substanciadas en el dominio de Carson se obtiene:

$$[\hat{\mathbf{K}}]\{\hat{\mathbf{W}}\}=\{\hat{\mathbf{P}}\} \quad (47)$$

donde $[\hat{\mathbf{K}}]$ es la matriz de rigidez global en el dominio de Carson, $\{\hat{\mathbf{W}}\}$ y $\{\hat{\mathbf{P}}\}$ son el vector global de desplazamientos nodales en el dominio de Carson y el vector global de cargas nodales en el dominio de Carson. En el elemento se plantea en uso de integración reducida.

4 METODOLOGIA DE RESOLUCION GENERAL

La metodología para resolver el problema de viscoelasticidad lineal, basada en un criterio de cálculo de los autores para vigas rectas anisótropas ^[11], y apropiadamente modificada para el caso, se puede sintetizar en el esquema de la Figura 4. Una vez definidas la micromecánica y las propiedades de los laminados en el dominio de Carson, se adopta la teoría de vigas curvas para la cual se obtienen los coeficientes de relajación viscoelásticos. A continuación se selecciona un conjunto de N_L valores de la variable “ \hat{s} ” del dominio de Carson. Para cada valor de esta variable se calculan, mediante el método de elementos finitos los desplazamientos y deformaciones. Posteriormente se adopta un conjunto de funciones, con las cuales se ajusta la solución en el conjunto de N_L valores de “ \hat{s} ”. Finalmente, la solución ajustada en el dominio Carson se invierte en forma numérica, para lo cual es necesario previamente seleccionar el tipo de algoritmo de inversión numérica. Para ello, se utiliza una serie de rutinas de inversión numérica de la transformada de Laplace ^[10].

La curva de ajuste de las N_L soluciones de elementos finitos se puede obtener proponiendo las siguientes funciones de ajuste:

$$\mathcal{P}_m(\hat{s})=\hat{s}^{-1/m}, \text{ con } m=\{1,2,3,4,5,6,\dots,\infty\} \quad (48)$$

En general, se requieren pocos términos en la función de ajuste y pocos elementos para reproducir con buena precisión los resultados analíticos, tal como se ha mostrado en una aplicación de los autores para vigas rectas ^[11].

5 EVALUACIÓN DE CASOS

A continuación se analizarán diferentes casos con el objeto de establecer patrones de comportamiento en régimen viscoelástico lineal para vigas curvas anisótropas. Las vigas curvas se construyen con el material cuyas características se muestran en la Tabla 1. Para el proceso de cálculo se emplean 25 puntos de muestreo para la variable “ \hat{s} ” del dominio de Carson y 15 términos en (46) para ajustar la solución como paso previo a la transformación inversa.

$$E^e=3.27 \text{ GPa}, E^V=1.8 \text{ GPa}, \eta^M=8000 \text{ GPa-hr}, \eta^V=300 \text{ GPa-hr},$$

$$\nu_0=0.38, \nu_1=0.21, E_1=68.67 \text{ GPa}, V_f=0.54$$

Tabla 1. Propiedades elásticas de la Resina ED-6 y el refuerzo de fibras de vidrio.

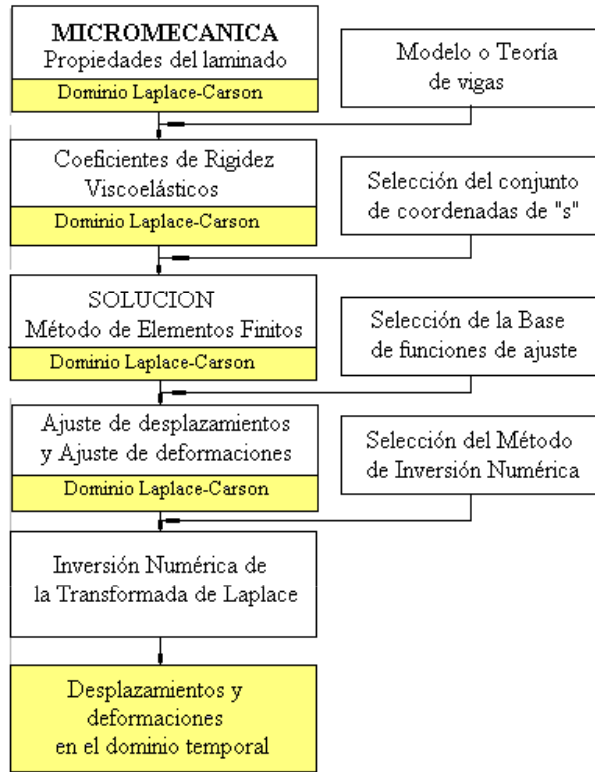


Figura 4. Esquema de resolución para el análisis dependiente del tiempo

La evaluación temporal se estipula sobre 1200 hs, tiempo considerado como suficiente para que se establezca el creep secundario. Las vigas curvas se modelan con 10 elementos ISOP4N, y se fijan dos condiciones de borde diferentes en los extremos, que corresponden a un extremo empotrado o bien uno libre, las cuales se identifican a continuación:

$$\text{Extremo empotrado: } \hat{u}_{xc} = \hat{u}_{yc} = \hat{u}_{zc} = \hat{\theta}_y = \hat{\theta}_z = \hat{\theta}_x = \hat{\phi}_x = 0 \quad (47)$$

$$\text{Extremo Libre: } \hat{Q}_X = \hat{Q}_Y = \hat{Q}_Z = \hat{M}_X = \hat{M}_Y = \hat{M}_Z = \hat{B} = 0 \quad (48)$$

5.1 Análisis de secciones abiertas con laminados balanceados

En la Figura 5 se muestran las dimensiones de la sección U de un arco empotrado en un extremo y libre en el otro, con radio $R = 2 \text{ m}$ y longitud $L = 1.5 \text{ m}$, de laminados simétricos y

balanceados del tipo $\{0/0/-\alpha/\alpha\}_s$. La viga se encuentra solicitada por una carga radial $Q_Y=500N$ y otra flexional $Q_Z=500N$, ubicadas en el centroide de la sección sobre el extremo libre. Dadas las características del laminado, no se generan acoplamientos elásticos de importancia, de manera que Q_Y conduce a desplazamientos contenidos en el plano de curvatura de la viga y Q_Z provoca desplazamientos flexionales, mecánicamente acoplados con las rotaciones torsionales, en virtud de la monosimetría de la sección.

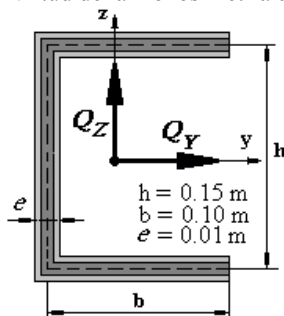


Figura 5. Descripción de la sección U del arco

En las Figuras 6, 7 y 8 se exponen las variaciones a lo largo de tiempo y para cada secuencia de laminación de los desplazamientos u_{yc} , u_{zc} y ϕ_x del extremo libre. Se puede observar, que a partir de las 400 hs aproximadamente, se estabiliza el patrón secundario del fenómeno creep, para todos los ángulos de refuerzo. En la Figura 7 se nota que el desplazamiento flexional u_{zc} para el laminado a 0° se halla entre las respuestas de los laminados de 15° y 30° hasta las 800 hs. y a partir de allí mayores que los de 30° . Para el ángulo de 15° se obtiene el menor margen de variación entre $t = 0$ hs. y $t = 1200$ hs., para la variable u_{zc} , con una diferencia porcentual de 34%. Esto significa que al estabilizarse la deformación por creep secundario, el desplazamiento u_{zc} en $t = 1200$ hs es 34% mayor que al inicio del proceso de deformación. Otro tanto ocurre para los desplazamientos u_{yc} y ϕ_x del extremo libre, que para el ángulo de 15° ofrecen márgenes de variación de 6% y 36%, al igual que el ángulo de laminación a 0° .

En las Figuras 9 y 10 se pueden apreciar las variaciones de los desplazamiento u_{zc} y ϕ_x en el extremo libre, en función de la dirección de refuerzo de las fibras. Nótese que para los desplazamientos flexionales, el ángulo de 15° produce el menor desplazamiento en $t=1200$ hs, convirtiéndose en uno de los laminados óptimos para este tipo de sección. Para los desplazamientos torsionales acoplados, el ángulo de refuerzo óptimo se encuentra entre 0 y 15° .

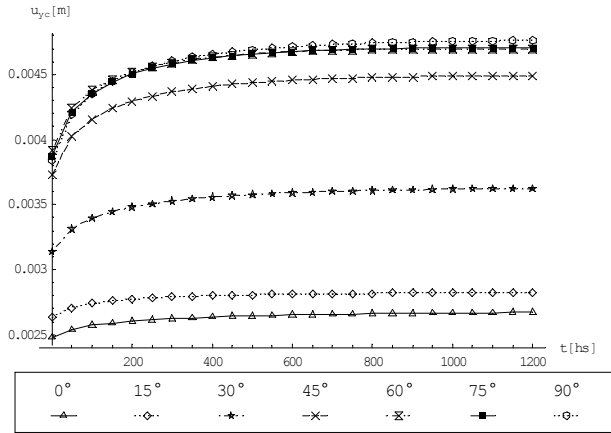


Figura 6. Variaciones temporales del desplazamiento u_{yz} del movimiento en el plano.

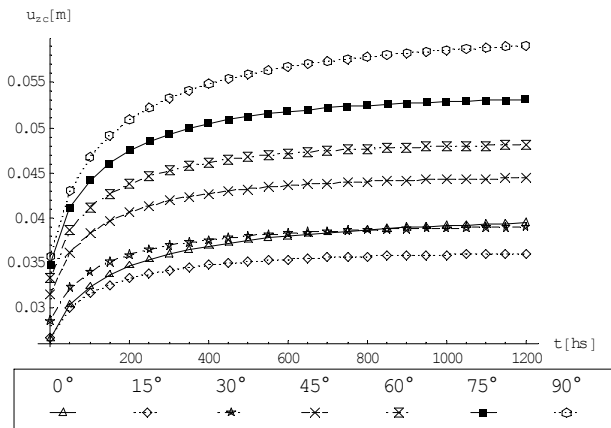


Figura 7. Variaciones temporales del desplazamiento u_{zc} del movimiento fuera del plano.

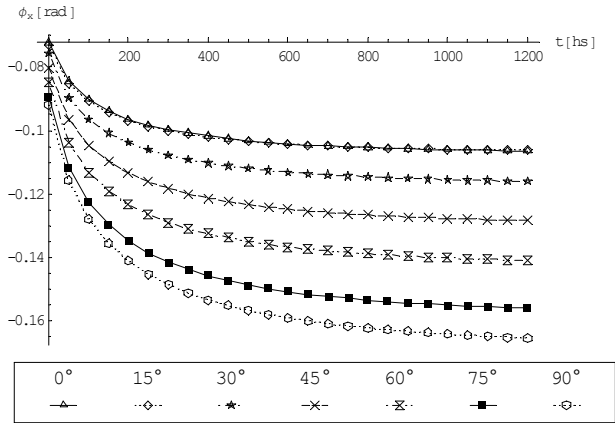


Figura 8. Variaciones temporales del desplazamiento ϕ_x del movimiento fuera del plano.

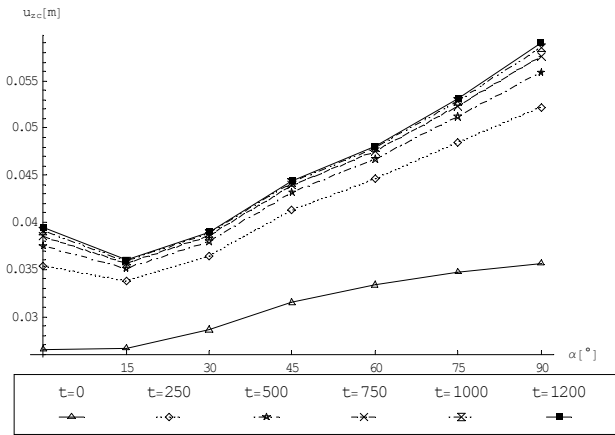


Figura 9. Variaciones de u_{zc} con respecto al ángulo de disposición de las fibras.

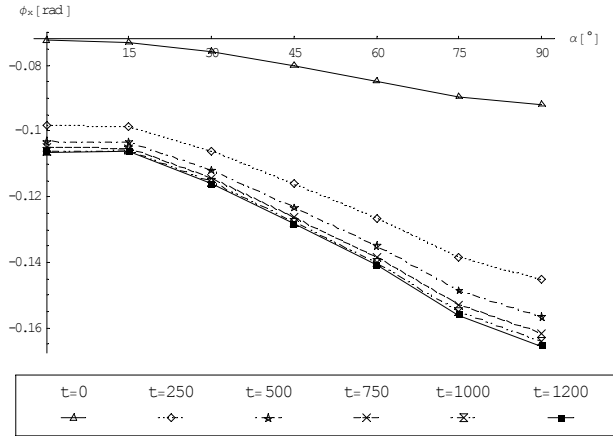


Figura 10. Variaciones de ϕ_x con respecto al ángulo de disposición de las fibras.

5.2 Análisis de secciones cerradas con laminados especiales

En la Figura 11 se muestran las dimensiones de la sección cajón rectangular de un arco empotrado en ambos extremos, con radio $R = 2.546 \text{ m}$ y abertura angular de 90° , con laminados de rigidez uniforme circunferencial (del inglés CUS: Circumferentially uniform stiffness) del tipo $\{0/\alpha\}_6$. La viga se encuentra solicitada por una carga flexional $Q_z = 4500 \text{ N}$ y un momento torsor $M_x = 4000 \text{ N.m}$, ubicadas sobre el centroide de la sección y aplicadas en el medio del arco. Dadas las características del laminado, se generan acoplamientos elásticos de importancia, que vinculan los esfuerzos propios del movimiento “en el plano” del arco y “fuera del plano” del arco.

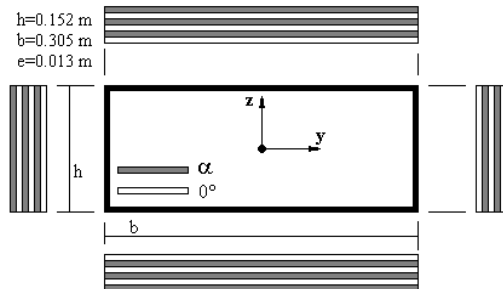


Figura 11. Dimensiones y particularidades de la sección cerrada de laminación CUS.

En las Figuras 12 y 13 se muestra la evolución temporal de los desplazamientos u_{zc} y ϕ_x en el punto de aplicación de las cargas, para cada un grupo de ángulos de laminación. Nótese que las mejores respuestas flexionales y torsionales se obtienen con un ángulo de laminación de 30° , entendiéndose como “la mejor respuesta”, a aquella en la que se verifican los menores desplazamientos. Nótese además que las respuestas del laminado a 0° son mayores a las de los laminados de 15° , 30° y 45° durante casi todo el tiempo y a partir de las 180 hs, también mayores que las del laminado a 60° .

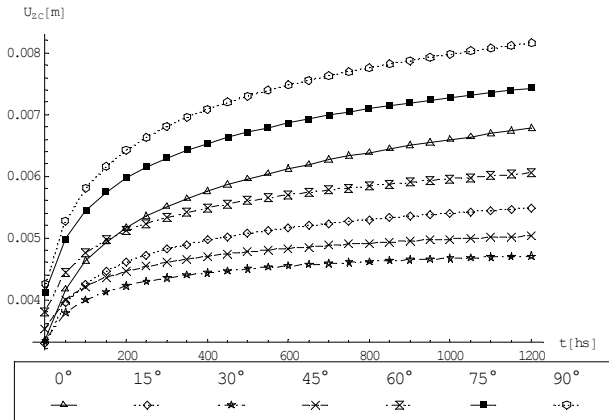


Figura 12. Variaciones de u_{zc} en función del tiempo.

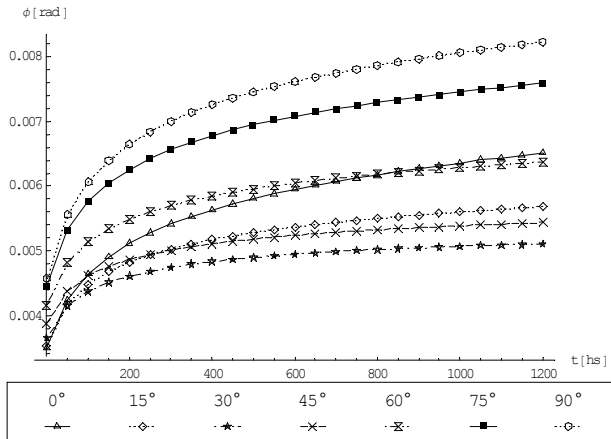


Figura 13. Variaciones de ϕ_x en función del tiempo.

En las Figuras 14 y 15 se muestran las evoluciones temporales de los desplazamientos u_{zc} y ϕ_x en el punto de aplicación de las cargas, en función del ángulo de laminación. El menor margen de deformación entre $t=0$ hs y $t=1200$ hs se obtiene en 30° , con una diferencia porcentual de 42% para los desplazamientos flexionales máximos (en el punto de aplicación de la carga) y de 45% para las rotaciones torsionales.

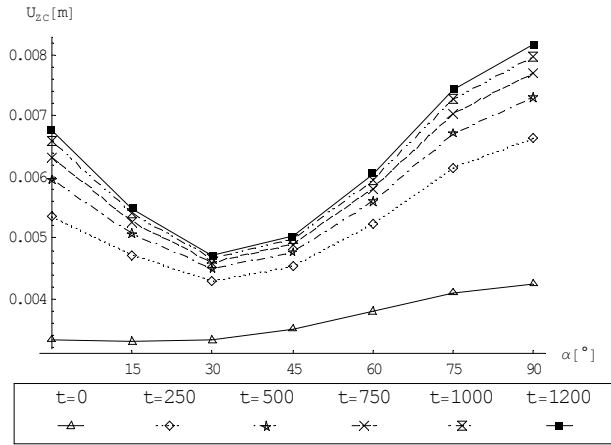


Figura 14. Variaciones de u_{zc} con respecto al ángulo de disposición de las fibras.

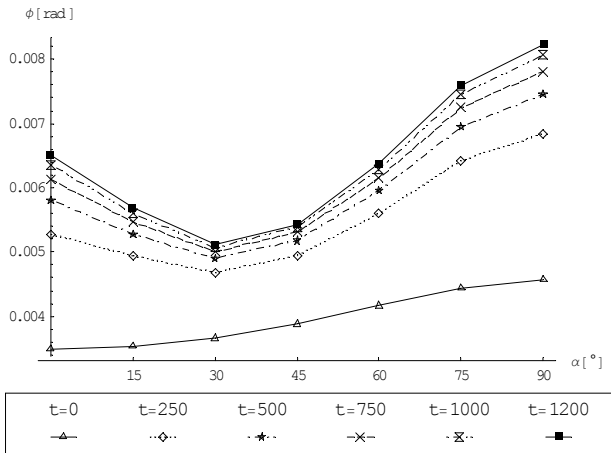


Figura 15. Variaciones de ϕ_x con respecto al ángulo de disposición de las fibras.

En la Figura 16 se muestra la evolución temporal del desplazamiento u_{zc} para diferentes relaciones volumétricas de refuerzo en el esquemas de laminación a 15° . Nótese como en la medida que se incrementa la proporción volumétrica de refuerzo fibroso, la capacidad de respuesta de la estructura mejora notablemente, desde un margen de 80% con refuerzo del 20% de fibras a un margen de 30% para un refuerzo fibroso de 70%. Por otro lado se disminuye aproximadamente en 4 veces la respuesta flexional al aumentar la proporción volumétrica de 20% a 70%.

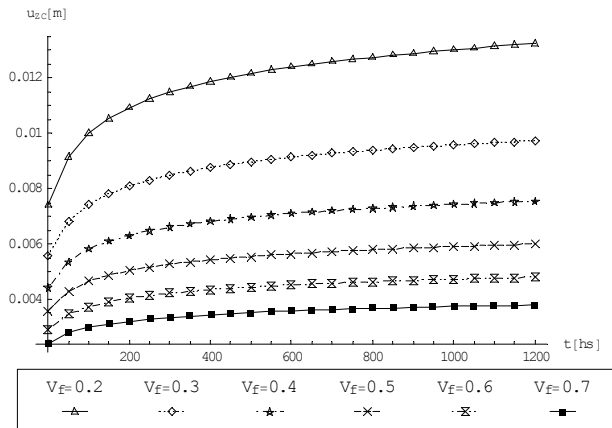


Figura 16. Variaciones temporales de u_{zc} para distintas relaciones volumétricas de refuerzo.

6 CONCLUSIONES

Se ha presentado un estudio viscoelástico lineal para vigas curvas compuestas con secciones de paredes delgadas, basado en una teoría desarrollada por los autores conjuntamente con un modelo micromecánico desarrollado por Barbero y colaboradores. El modelo de viga curva adoptado contempla en forma completa la flexibilidad de corte, es decir flexibilidad por corte debido a flexión y por corte debido a torsión por alabeo no uniforme. El esquema de cálculo se sustenta en el método de elementos finitos aplicando el principio de correspondencia. Se ha puesto énfasis en analizar el comportamiento de dos secciones con laminados particulares que favorecen o bien anulan ciertos acoplamientos elásticos. Se ha podido observar que dependiendo el tipo de sección, para un mismo material, con determinadas secuencias de laminación se obtienen las mejores respuestas, entendidas como las que generan menores desplazamientos. Así mismo se consideró el comportamiento viscoelástico de la matriz, regido por un modelo tetraparamétrico que reproduce toda la evolución del efecto creep. Esto significa que se evaluó el creep primario y el secundario, a diferencia de otros estudios que solo admiten el creep secundario.

7 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo recibido por la Secretaria de Ciencia y Tecnología de la Universidad Tecnológica Nacional y del CONICET.

8 REFERENCIAS

- [1] E.J. Barbero, R. Luciano, “*Micromechanical Formulas for the Relaxation Tensor of Linear Viscoelastic Composites with Transversely Isotropic Fibers*”, Int. Journal of Solids and Structures 32, 1859-1872 (1995).
- [2] J.S. Harris, E. J. Barbero, “*Prediction of Creep Properties of Laminated Composites from Matrix Creep Data*”, Jou. Reinforced Plastics and Composites 17, 361-378 (1998).
- [3] P. Qiao P., E.J. Barbero, J.F. Dávalos. “*On the linear viscoelasticity of thin walled laminated composite beams*”. J. Composite Materials, 34 39-68 (2000)
- [4] M.T. Piovan y V.H. Cortínez, “*Mecánica de Vigas Curvas anisótropas con secciones de Paredes Delgadas*”. Aceptado para publicación. Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y diseño en Ingeniería (2002)
- [5] G.Mase “*Mecánica del Medio Continuo*”. Compendios Schawm-McGraw-Hill. (1977)
- [6] R. Luciano y E.J. Barbero. “*Analytical Expression for the Relaxation Moduli of Linear Viscoelastic Composites with Periodic Microstructure*”. Journal of Applied Mechanics. Paper Number 95-APM-10 (1995).
- [7] R. Luciano y E.J. Barbero. “*Formulas for the Stiffness of Composites with Periodic Microstructure*”. Intl Journal Solids and Structures, 31(21), 2933-2944 (1994).
- [8] E.J. Barbero, “*Introduction to Composite Materials Design*”. Taylor and Francis (1998).
- [9] E. Oñate. “*El Cálculo de estructuras con Elementos Finitos*”. Cimne. Barcelona (1992).
- [10] A. Mallet. “*Numerical Inversion of Laplace transform*”. Wolfram Research. (2000).
- [11] V.H. Cortínez y M.T. Piovan, “*Análisis dependiente del tiempo de vigas de pared delgada construidas con materiales compuestos*”. Mecánica Computacional (2001)